Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Лекции 7–9

§ 9. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

9.1. Основные понятия

Под ***системой координат*** на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является ***прямоугольная*** (*декартова*) ***система координат***.

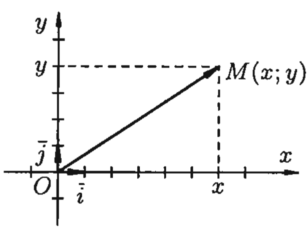


Рис. 23

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения O — *началом координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (осью Ox), другую — осью *ординат* (осью Oy) (рис. 23).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат — вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — *четверти* (или *квадранты*).

Единичные векторы осей обозначают $\bar{i}$ и $\bar{j}$ ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$).

Систему координат обозначают Oxy (или $O\bar{i}\bar{j}$), а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью*.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy ($O\bar{i}\bar{j}$) называются координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$, число x называется ***абсциссой*** точки M, y — ***ординатой*** точки M.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Другой практически важной системой координат является *полярная система координат*. Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*, и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с O. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки) (см. рис. 24).

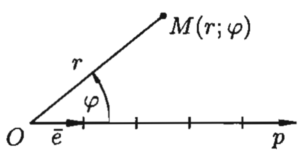


Рис. 24

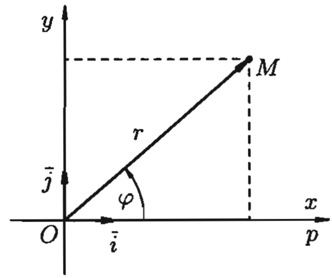


Рис. 25

Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M, пишут $M(r;\varphi)$, при этом r называют ***полярным радиусом***, φ — *полярным углом*.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $(-\pi;\pi]$ (или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), а полярный радиус — $[0;\infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и обратно.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Ox. Пусть x и y — прямоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты.

Из рисунка 25 видно, что прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные же координаты точки M выражаются через ее декартовы координаты (тот же рисунок) такими формулами:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Определяя величину φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Пример 9.1. Дана точка $M(-1; -\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M.

◐ Решение: Находим r и φ:

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но так как точка M лежит в 3-й четверти, то $n = -1$ и $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$. Итак, полярные координаты точки M есть $r = 2$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. $M\left(2; \frac{-2\pi}{3}\right)$. ●

9.2. Основные приложения метода координат на плоскости

Расстояние между двумя точками

Требуется найти расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости Oxy.

◐ Решение: Искомое расстояние d равно длине вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, т. е.

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad ●$$

Деление отрезка в данном отношении

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т. е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB такой, что $\frac{AM}{MB} = \lambda$ (см. рис. 26).

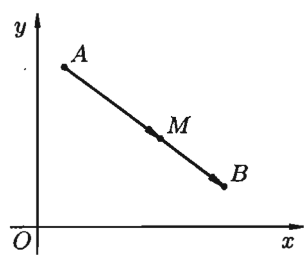


Рис. 26

◐ Решение: Введем в рассмотрение векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если

$$\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}. \tag{9.1}$$

Но $\overline{AM} = (x - x_1; y - y_1)$, т. е. $\overline{AM} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$ и $\overline{MB} = (x_2 - x; y_2 - y)$, т. е. $\overline{MB} = (x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j}$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} = \lambda(x_2 - x)\bar{i} + \lambda(y_2 - y)\bar{j}.$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \tag{9.2}$$

и

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{9.3}$$

Формулы (9.2) и (9.3) называются *формулами деления отрезка в данном отношении.* В частности, при $\lambda = 1$, т. е. если $AM = MB$, то они примут вид $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. В этом случае точка $M(x; y)$ является *серединой отрезка* AB. ●

Замечание: Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки A и M совпадают, если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB — говорят, что точка M делит отрезок AB внешним образом ($\lambda \neq -1$, т. к. в противном случае $\frac{AM}{MB} = -1$, т. е. $AM + MB = 0$, т. е. $AB = 0$).

Площадь треугольника

Требуется найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

❍ Решение: Опустим из вершин A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox (см. рис. 27). Очевидно, что

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}.$$

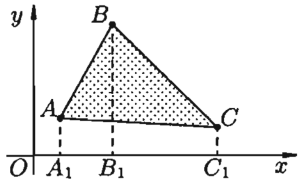


Рис. 27

Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_2 + x_3 y_3 -$$

$$- x_2 y_3 - x_3 y_1 + x_1 y_1 - x_3 y_3 + x_1 y_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_3(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1)) =$$

$$= \frac{1}{2}((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$ ●

Замечание: Если при вычислении площади треугольника получим $S = 0$, то это означает, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если же получим отрицательное число, то следует взять его модуль.

9.3. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется *преобразованием системы координат.*

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Под *параллельным переносом* осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

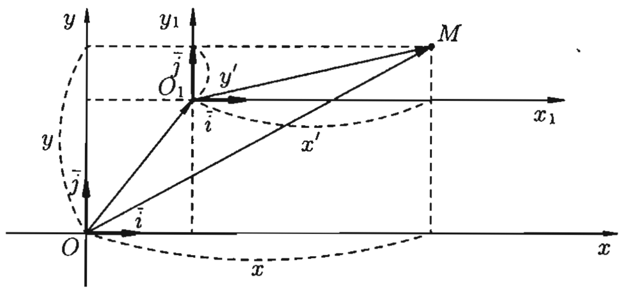


Рис. 28

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат Oxy, т. е. $O_1(x_0; y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x'; y')$ (см. рис. 28).

Рассмотрим векторы

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \overline{OO_1} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \quad \overline{O_1M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}.$$

Так как $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$, то $x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}$, т. е.

$$x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} = (x_0 + x') \cdot \bar{i} + (y_0 + y') \cdot \bar{j}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

Поворот осей координат

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α (см. рис. 29).

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x; y)$ — ее координаты в старой системе и $(x'; y')$ — в новой системе.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1 (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha + \varphi$ и φ, где φ — полярный угол в новой полярной системе.

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \cdot \cos\alpha - r\sin\varphi \cdot \sin\alpha, \\ y = r\cos\varphi \cdot \sin\alpha + r\sin\varphi \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Но $r\cos\varphi = x'$ и $r\sin\varphi = y'$. Поэтому

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}}$$

Полученные формулы называются ***формулами поворота осей.*** Они позволяют определять старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки M, и наоборот.

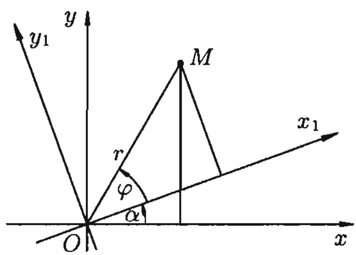


Рис. 29

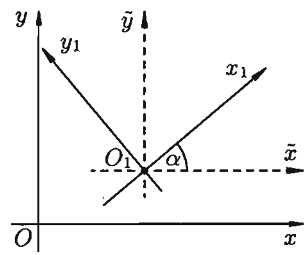


Рис. 30

Если новая система координат $O_1x_1y_1$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α (см. рис. 30), то путем введения вспомогательной системы $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ легко получить формулы

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + x_0, \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

выражающие старые координаты x и y произвольной точки через ее новые координаты x' и y'.

§ 10. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

10.1. Основные понятия

Линия на плоскости часто задается как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 10.1. Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x + y + 3 = 0$?

○ Решение: Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2 \cdot (-2) + 1 + 3 = 0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, т. к. $2 \cdot 1 + 1 + 3 \neq 0$. ●

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x;y) = 0$ и $F_2(x;y) = 0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение $F(r;\varphi)=0$ называется *уравнением данной линии в полярной системе координат*, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{10.1}$$

где x и y — координаты произвольной точки $M(x;y)$, лежащей на данной линии, а t — переменная, называемая *параметром*; параметр t определяет положение точки $(x;y)$ на плоскости.

Например, если $x=t+1$, $y=t^2$, то значению параметра $t=2$ соответствует на плоскости точка $(3;4)$, т. к. $x=2+1=3$, $y=2^2=4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется *параметрическим*, а уравнения (10.1) — *параметрическими уравнениями линии.*

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x;y)=0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t. Например, от уравнений $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \end{cases}$ путем подстановки $t=x$ во второе уравнение, легко получить уравнение $y=x^2$; или $y-x^2=0$, т. е. вида $F(x;y)=0$. Однако, заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r}=\bar{r}(t)$, где t — скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определенный вектор $\bar{r}_0=\bar{r}(t_0)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\bar{r}=\bar{r}(t)$ опишет некоторую линию (см. рис. 31).

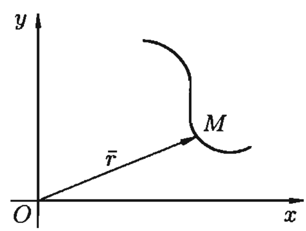


Рис. 31

Векторному уравнению линии $\bar{r}=\bar{r}(t)$ в системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения линии есть ее параметрические уравнения.

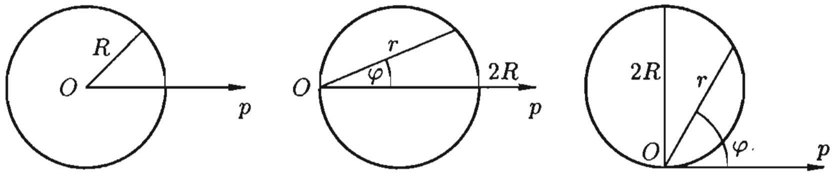
Векторное уравнение и параметрические уравнения линии имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются *уравнениями движения*, а линия — *траекторией* точки, параметр t при этом есть время.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x;y)=0$.

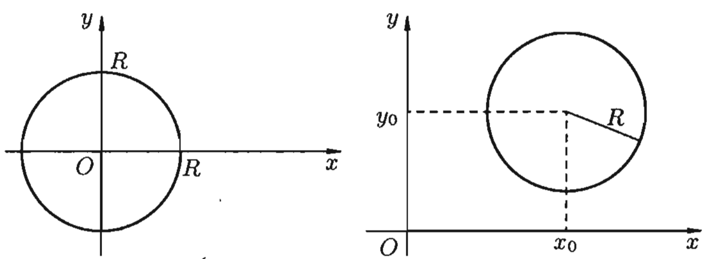
Всякому уравнению вида $F(x;y)=0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (выражение «вообще говоря» означает, что сказанное допускает исключения. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ соответствует не линия, а точка $(2;3)$; уравнению $x^2+y^2+5=0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ).

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти ее уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства.

На рисунках 32–40 приведены примеры некоторых кривых и указаны их уравнения.



$r=R$ $\qquad$ $r=2R\cdot\cos\varphi$ $\qquad$ $r=2R\cdot\sin\varphi$



$x^2+y^2=R^2$ или $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t \end{cases}$ $\qquad$ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Рис. 32. ***Окружность радиуса R***

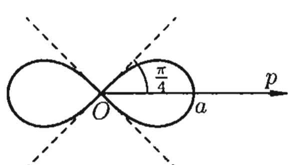


Рис. 33. ***Лемниската Бернулли***

Уравнение в прямоугольных координатах: $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$; в полярных координатах: $r=a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$.

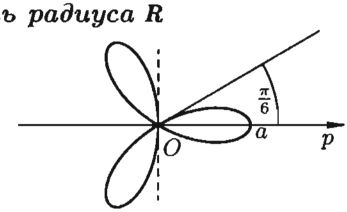


Рис. 34. ***Трехлепестковая роза***

В полярных координатах ее уравнение имеет вид $r=a\cdot\cos 3\varphi$, где $a>0$.

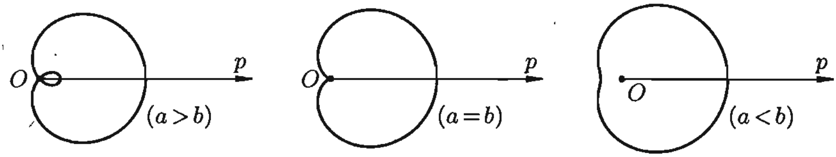


Рис. 35. ***Улитка Паскаля***
Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a\cos\varphi$.

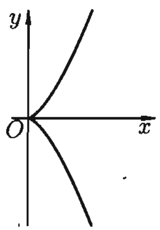


Рис. 36. ***Полукубическая парабола***
Уравнение кривой $y^2 = x^3$ или

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

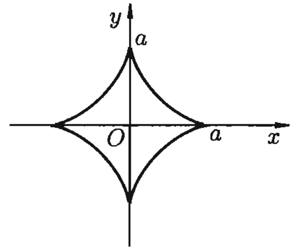


Рис. 37. ***Астроида***
Уравнение в прямоугольных координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

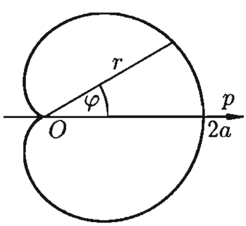


Рис. 38. ***Кардиоида***
Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = a(1 + \cos\varphi)$, где $a > 0$. Кардиоида — частный случай улитки Паскаля ($a = b$).

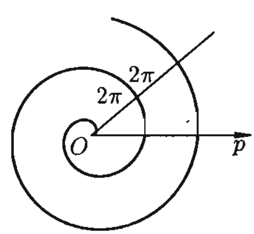


Рис. 39. ***Спираль Архимеда***
Уравнение кривой в полярных координатах $r = a\varphi$, где $a > 0$ — постоянное.

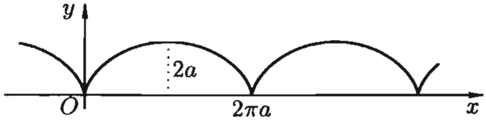


Рис. 40. ***Циклоида***

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ где $a > 0$. Циклоида — это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

10.2. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки $N(0; b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис. 41).

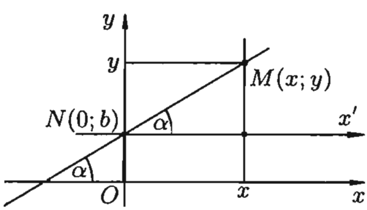


Рис. 41

Под углом α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ (см. рис. 41). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка M имеет координаты x и $y - b$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y-b}{x}$, т. е. $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. Введем обозначение $\operatorname{tg}\alpha = k$, получаем уравнение

$$\boxed{y = kx + b,} \tag{10.2}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки $P(x; y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой, а уравнение (10.2) — ***уравнением прямой с угловым коэффициентом.***

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$ и уравнение (10.2) примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a, \tag{10.3}$$

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.4}$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если $B = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т. е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Если $B \neq 0$, то из уравнения (10.4) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется *общим уравнением прямой*.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, то получаем $Ax + By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0; 0)$, прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$.

Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \tag{10.5}$$

Уравнение (10.5) с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{10.6}$$

где k — пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (10.6), получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \tag{10.7}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$ (см. рис. 42). В этом случае уравнение (10.7) примет вид

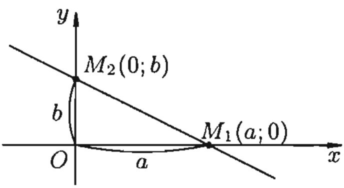


Рис. 42

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n} = (A; B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (см. рис. 43). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{10.8}$$

Уравнение (10.8) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.*

Вектор $\bar{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой.*

Уравнение (10.8) можно переписать в виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.9}$$

где A и B — координаты нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ — свободный член. Уравнение (10.9) есть общее уравнение прямой (см. (10.4)).

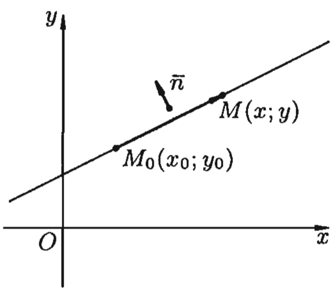


Рис. 43

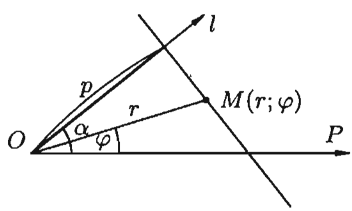


Рис. 44

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 44).

Для любой точки $M(r; \varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_l\, \overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$\text{пр}_l\,\overline{OM} = |\overline{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$\boxed{r\cos(\varphi - \alpha) = p.} \tag{10.10}$$

Полученное уравнение (10.10) и есть *уравнение прямой в полярных координатах.*

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 45). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Введем полярную систему, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) - p = 0, \quad \text{т. е.} \quad r \cdot \cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Но, в силу формул, связывающих прямоугольные и полярные координаты, имеем: $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение (10.10) прямой в прямоугольной системе координат примет вид

$$\boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.} \tag{10.11}$$

Уравнение (10.11) называется *нормальным уравнением прямой.*

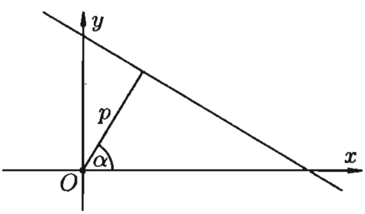


Рис. 45

Покажем, как привести уравнение (10.4) прямой к виду (10.11).

Умножим все члены уравнения (10.4) на некоторый множитель $\lambda \neq 0$. Получим $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Это уравнение должно обратиться в уравнение (10.11). Следовательно, должны выполняться равенства: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$. Из первых двух равенств находим

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем.* Согласно третьему равенству $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 10.2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

○ Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{-\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 3 = 0$. ●

10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 46).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.

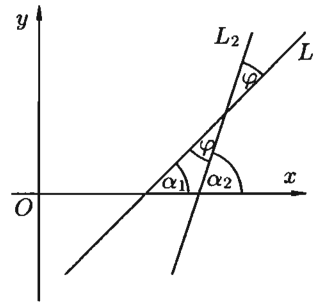


Рис. 46

Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},} \qquad (10.12)$$

откуда легко получим величину искомого угла. ●

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы (10.12) берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Из формулы (10.12) следует $k_2 - k_1 = 0$, т. е. $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:* $k_1 = k_2$.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ (или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

○ Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\overline{n} = (A; B)$. Следовательно,

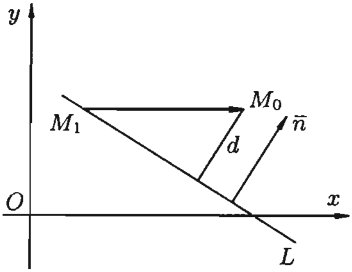


Рис. 47

$$d = |\operatorname{пр}_{\overline{n}} \overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \tag{10.13}$$

что и требовалось получить. ●

Пример 10.3. Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

○ Решение: По формуле (10.13) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$ ●

§ 11. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

11.1. Основные понятия

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.1}$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка*. Ниже будет установлено, что уравнение (11.1) определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Прежде, чем переходить к этому утверждению, изучим свойства перечисленных кривых.

11.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности (см. рис. 48).

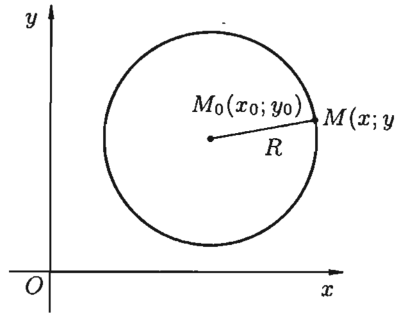


Рис. 48

Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

то есть

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.} \qquad (11.2)$$

Уравнению (11.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.

Уравнение (11.2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (11.2) после несложных преобразований примет вид $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (11.1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

Рассмотрим обратную задачу. Положив в уравнении (11.1) значения $B = 0$ и $A = C \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (11.3)$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0,$$

т. е.

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}. \tag{11.4}$$

Отсюда следует, что уравнение (11.3) определяет окружность при условии $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}>0$. Ее центр находится в точке $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$, а радиус

$$R=\sqrt{\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}.$$

Если же $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$, то уравнение (11.3) имеет вид

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0.$$

Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$. В этом случае говорят: «окружность выродилась в точку» (имеет нулевой радиус).

Если $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$, то уравнение (11.4), а следовательно, и равносильное уравнение (11.3), не определяет никакой линии, так как правая часть уравнения (11.4) отрицательна, а левая часть — не отрицательна (говорят: «окружность мнимая»).

11.3. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

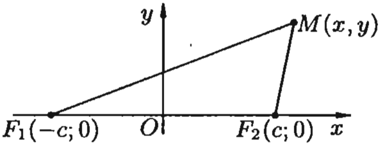


Рис. 49

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов — через $2a$ (см. рис. 49). По определению $2a>2c$, т. е. $a>c$.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (11.5)$$

Это, по сути, и есть уравнение эллипса.

Преобразуем уравнение (11.5) к более простому виду следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx,$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Положим

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2.} \qquad (11.6)$$

Тогда последнее уравнение примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (11.7)$$

Можно доказать, что уравнение (11.7) равносильно исходному уравнению. Оно называется ***каноническим уравнением эллипса.***

Эллипс — кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (11.7) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют *центром эллипса.*

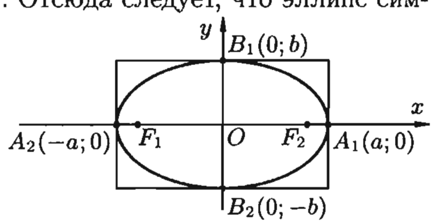


Рис. 50

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y = 0$, находим две точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (см. рис. 50). Положив в уравнении (11.7) $x = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса.* Отрезки A_1A_2 и

B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой и малой осями* эллипса. Числа a и b называются соответственно большой и малой *полуосями* эллипса.

3. Из уравнения (11.7) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ или $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-b \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В уравнении (11.7) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 50 (овальная замкнутая кривая).

Дополнительные сведения об эллипсе

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (11.7) принимает вид $x^2+y^2 = a^2$. В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением $\frac{c}{a}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a},} \tag{11.8}$$

причем $0 < \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$. С учетом равенства (11.6) формулу (11.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

т. е.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если положить $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2 (см. рис. 51). Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M. Очевидно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{и} \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

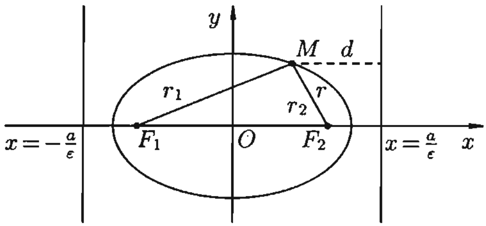


Рис. 51

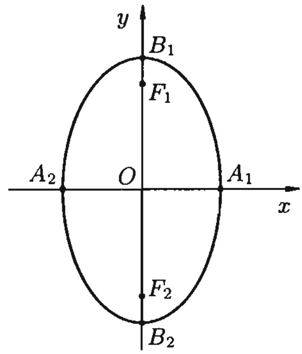


Рис. 52

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса. Значение директрисы эллипса выявляется следующим утверждением.

> **Теорема 11.1.** Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Из равенства (11.6) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (11.7) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox (см. рис. 52). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

11.4. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

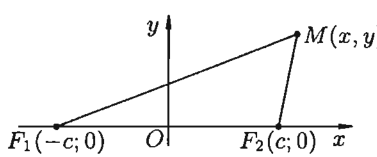


Рис. 53

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (см. рис. 53). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда согласно определению гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, т. е. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$. После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим ***каноническое уравнение гиперболы***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{11.9}$$

где

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2.} \tag{11.10}$$

Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каконическим уравнением.

1. Уравнение (11.9) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром гиперболы***.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (11.9), находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Положив $x = 0$ в (11.9), получаем $y^2 = -b^2$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами*** гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — ***действительной осью***, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — ***действительной полуосью*** гиперболы.

Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется ***мнимой осью***, число b — ***мнимой полуосью***. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется ***основным прямоугольником гиперболы***.

3. Из уравнения (11.9) следует, что уменьшаемое $\frac{x^2}{a^2}$ не меньше единицы, т. е. что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (*правая ветвь* гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (*левая ветвь* гиперболы).

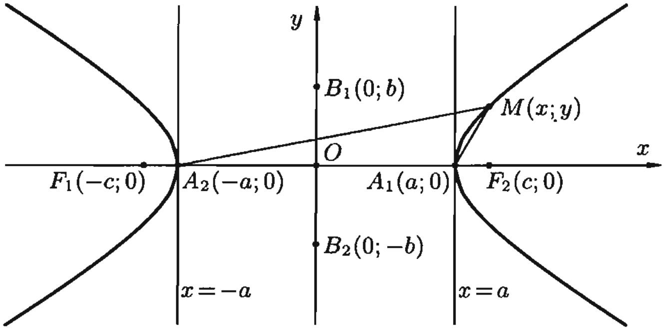


Рис. 54

4. Из уравнения (11.9) гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице.

Из сказанного следует, что гипербола имеет форму, изображенную на рисунке 54 (кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей).

Асимптоты гиперболы

Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат. На рисунке 55 приведена иллюстрация понятия асимптоты: прямая L является асимптотой для кривой K.

Покажем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.} \tag{11.11}$$

Так как прямые (11.11) и гипербола (11.9) симметричны относительно координатных осей, то достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти.

Возьмем на прямой $y = \frac{b}{a}x$ точку N имеющей ту же абсциссу x, что и точка $M(x;y)$ на гиперболе $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (см. рис. 56), и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

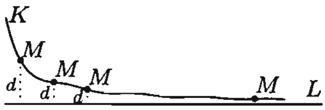


Рис. 55

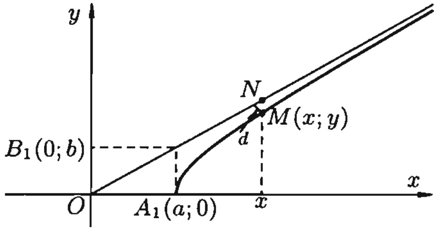


Рис. 56

Как видно, по мере возрастания x знаменатель дроби увеличивается; числитель — есть постоянная величина. Стало быть, длина отрезка MN стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой, то d и подавно стремится к нулю. Итак, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы (11.9).

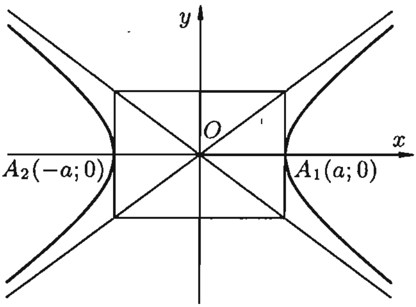


Рис. 57

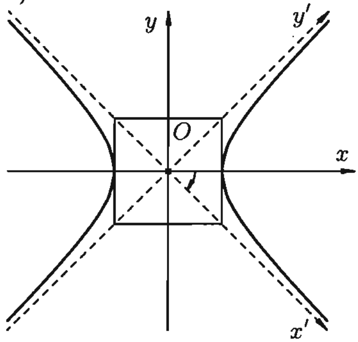


Рис. 58

При построении гиперболы (11.9) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (см. рис. 57), провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат

Гипербола (11.9) называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны ($a = b$). Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{11.12}$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Рассмотрим уравнение этой гиперболы в новой системе координат $Ox'y'$ (см. рис. 58), полученной из старой поворотом осей координат на угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Используем формулы поворота осей координат (их вывод показан на с. 63):

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Подставляем значения x и y в уравнение (11.12):

$$\left(x' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y' \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(x' \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(-x' + y')^2 = a^2, \quad x' \cdot y' = \frac{a^2}{2}, \text{ или } y' = \frac{k}{x'},$$

где $k = \frac{a^2}{2}$.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ox и Oy являются асимптотами, будет иметь вид $y = \frac{k}{x}$.

Дополнительные сведения о гиперболе

Эксцентриситетом гиперболы (11.9) называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы, обозначается ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы: $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Действительно, из равенства (11.10) следует, что $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1$, т. е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ ее полуосей, а значит, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

Фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой — $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ и $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Это значит, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая — между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ — на оси Ox. На рисунке 59 она изображена пунктиром.

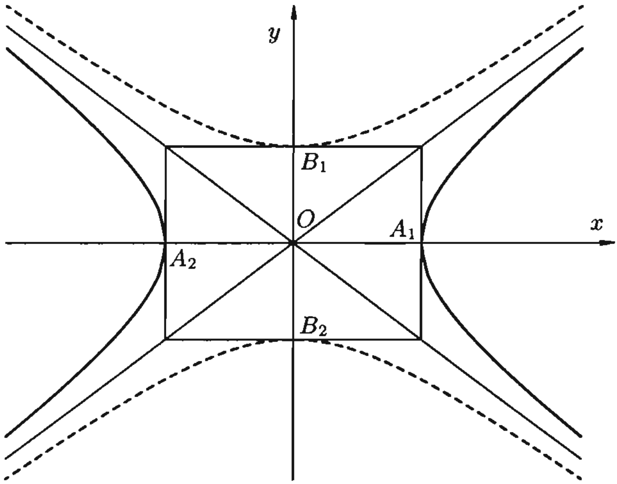


Рис. 59

Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

11.5. Парабола

Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p $(p > 0)$.

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (см. рис. 60). В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, или $x + \frac{p}{2} = 0$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $MF = MN$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \text{а} \quad MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{11.13}$$

Уравнение (11.13) называется *каноническим уравнением параболы*. Парабола есть линия второго порядка.

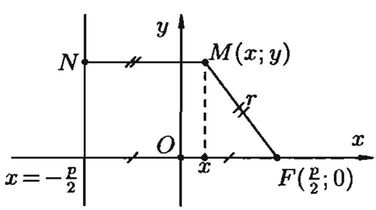


Рис. 60

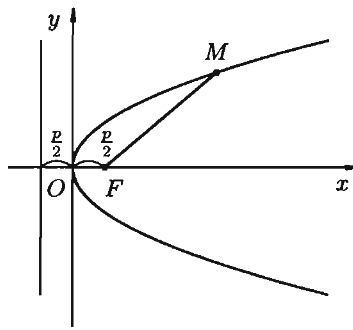


Рис. 61

Исследование форм параболы по ее уравнению

1. В уравнении (11.13) переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2. Так как $p > 0$, то из (11.13) следует, что $x \geqslant 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид (форму), изображенный на рисунке 61. Точка $O(0;0)$ называется *вершиной параболы*, отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы, они изображены на рисунке 62.

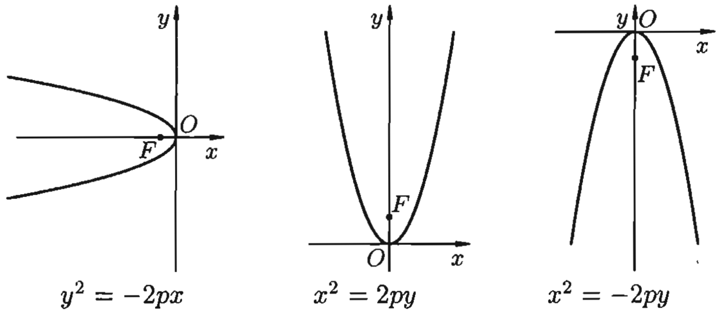


Рис. 62

Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$, где $A \neq 0$, B и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения.

11.6. Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Найдем сначала уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис. 63).

В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

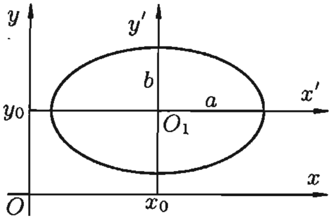
Так как $x' = x - x_0$, $y' = x - y_0$ (формулы параллельного переноса, см. с. 62), то в старой системе координат уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ и полуосями a и b (см. рис. 64):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

И, наконец, параболы, изображенные на рисунке 65, имеют соответствующие уравнения.



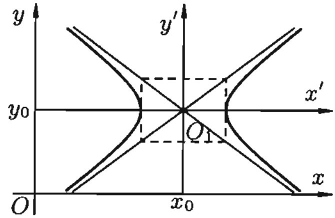
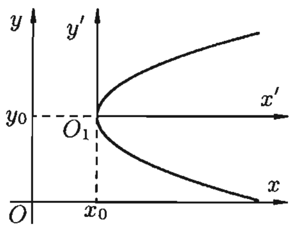
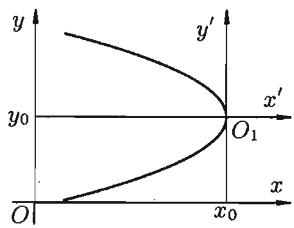


Рис. 63

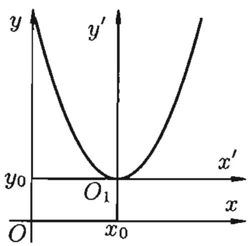
Рис. 64



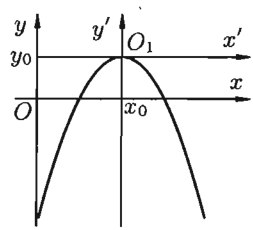
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$



$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$



$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$



$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$

Рис. 65

Уравнение $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ после преобразований (раскрыть скобки, перенести все члены уравнения в одну сторону, привести подобные члены, ввести новые обозначения для коэффициентов) можно записать с помощью *единого* уравнения вида

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{11.14}$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (11.14) определяет одну из кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) второго порядка? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 11.2. Уравнение (11.14) всегда определяет: либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Пример 11.1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

❍ Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A{\cdot}C = 4{\cdot}5 > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y - 3)^2 = 60, \qquad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y - 3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$. ●

Пример 11.2. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

❍ Решение: Указанное уравнение определяет параболу ($C = 0$). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x + 5)^2 = 2y + 14, \quad (x + 5)^2 = 2(y + 7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p = 1$. ●

Пример 11.3. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$ ($A \cdot C = -4 < 0$).

❍ Решение: Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$

$$4(x + 1)^2 - (y + 4)^2 = 0,$$

$$(2(x + 1) + (y + 4)) \cdot (2(x + 1) - (y + 4)) = 0,$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $2x + y + 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$. ●

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.15}$$

Оно отличается от уравнения (11.14) наличием члена с произведением координат ($B \neq 0$). Можно, путем поворота координатных осей на угол α, преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Используя формулы поворота осей (с. 63)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

выразим старые координаты через новые:

$$\begin{aligned} A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + \\ + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0. \end{aligned}$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x' \cdot y'$ обратился в нуль, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

т. е.

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0, \tag{11.16}$$

т. е.

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{11.17}$$

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию (11.17), уравнение (11.15) сводится к уравнению (11.14).

Вывод: общее уравнение второго порядка (11.15) определяет на плоскости (если не считать случаев вырождения и распадения) следующие кривые: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

Замечание: Если $A = C$, то уравнение (11.17) теряет смысл. В этом случае $\cos 2\alpha = 0$ (см. (11.16)), тогда $2\alpha = 90°$, т. е. $\alpha = 45°$. Итак, при $A = C$ систему координат следует повернуть на $45°$.