§ 14. ФУНКЦИЯ

14.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

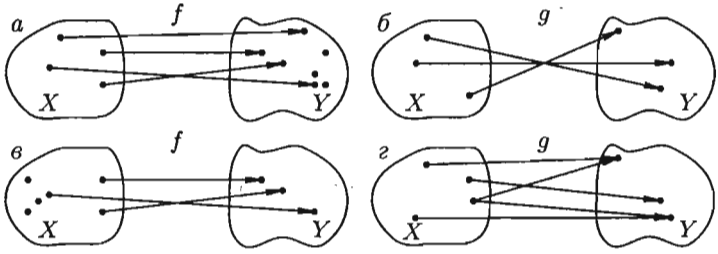

Рис. 98

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 98 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 98 *в* и *г* — нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). От-

носительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Например, графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0; 0)$ (см. рис. 99).

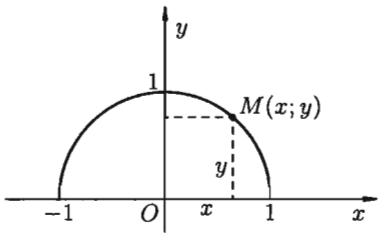

Рис. 99

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например:

$$1)\ S = \pi R^2; \quad 2)\ y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2, \\ x - 4 & \text{при } x \geqslant 2; \end{cases} \quad 3)\ y^2 - 4x = 0.$$

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1; 1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные

таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

14.3. Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

Например, $y = x^2$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \ln|x|$ — четные функции; а $y = \sin x$, $y = x^3$ — нечетные функции; $y = x - 1$, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве D_1.

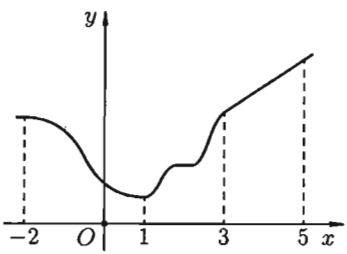

Рис. 100

Например, функция, заданная графиком (см. рис. 100), убывает на интервале $(-2; 1)$, не убывает на интервале $(1; 5)$, возрастает на интервале $(3; 5)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие — ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***. На рисунке (выше) функция строго монотонна на $(-2; 1)$ и $(3; 5)$; монотонна на $(1; 3)$.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной*** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$ (короткая запись: $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D, если $\exists M > 0 : \forall x \in D \implies |f(x)| \leqslant M$). Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис. 101).

4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется ***периодом*** функции. Если T — период функции, то ее периодами будут также числа $m \cdot T$, где $m = \pm 1; \pm 2, \ldots$ Так, для $y = \sin x$ периодами будут числа $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi, \ldots$ Основной период (наименьший положительный) — это период $T = 2\pi$. Вообще обычно за основной период берут наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x + T) = f(x)$.

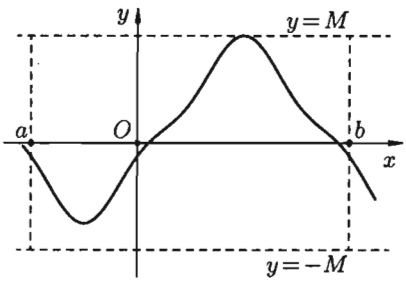

Рис. 101

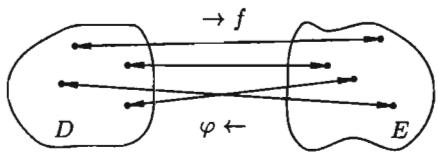

Рис. 102

14.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (см. рис. 102). Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

Примеры:

1. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \frac{1}{2}y$:

2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; 1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, обратной не существует, т. к. одному значению y соответствует два значения x (так, если $y = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая ***строго монотонная функция имеет обратную***. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т. е. графики их совпадают. Если же условиться, что, как обычно, независимую переменную (т. е. аргумент) обозначить через x, а зависимую переменную через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

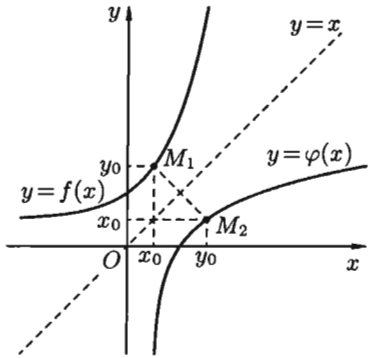

Рис. 103

Это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Но точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 103). Поэтому ***графики взаимно обратных функций*** $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ***симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов***.

14.5. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** заданных функций, или ***функцией от функции***).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

14.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

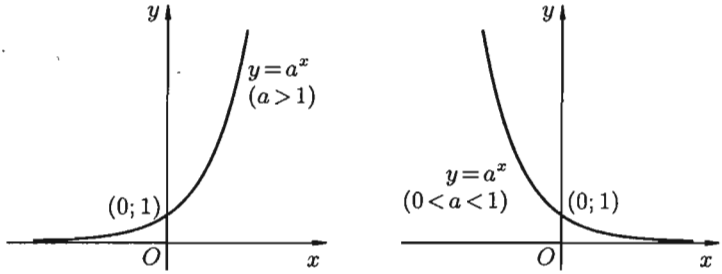

Рис. 104

2) *Степенная* функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рис. 105.

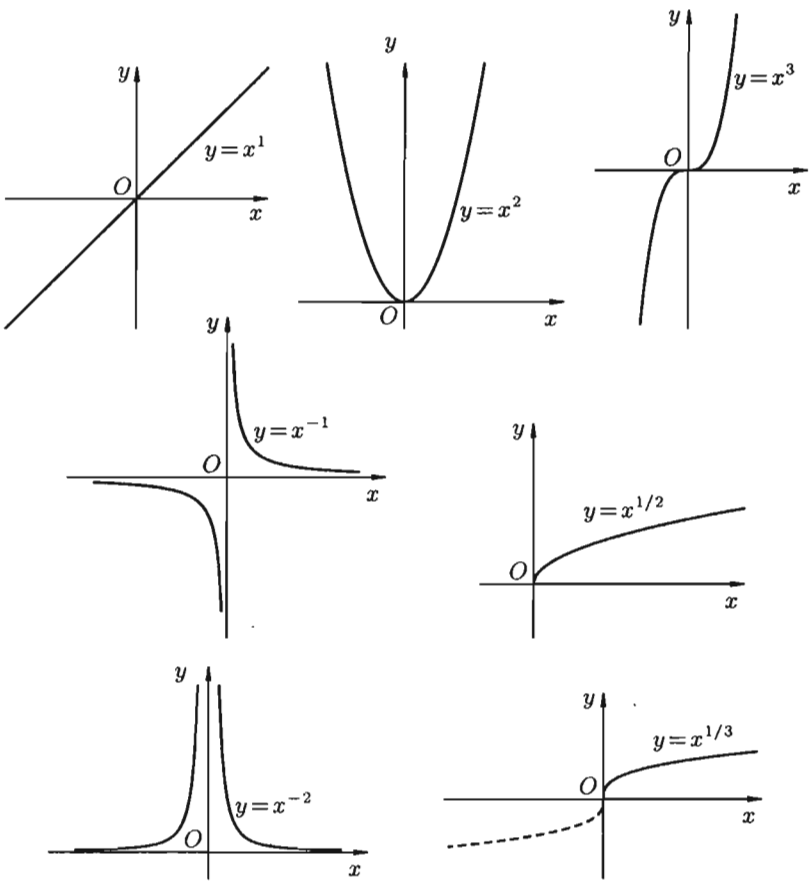

Рис. 105

3) *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 106.

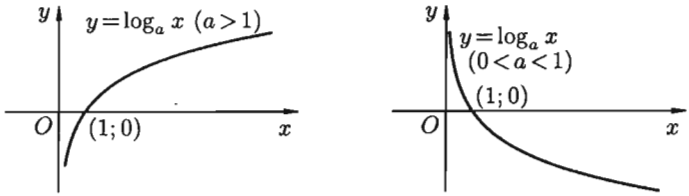

Рис. 106

4) *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.

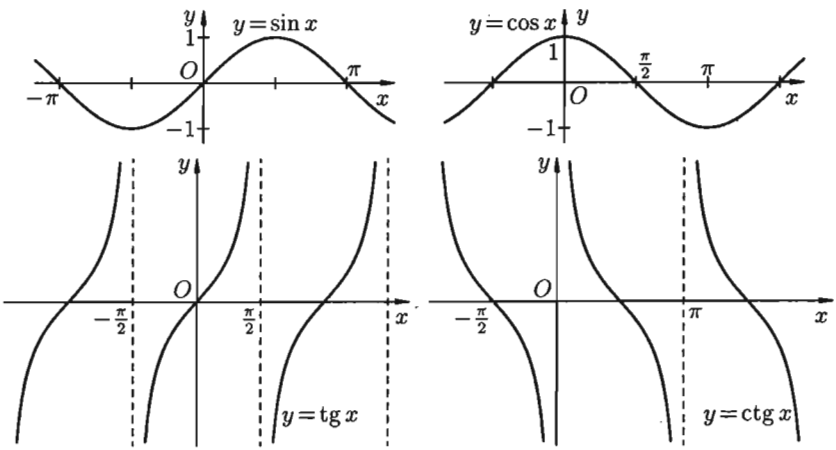

Рис. 107

5) *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***. Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}}; \quad y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}; \quad y = \lg(2 + x^3).$$