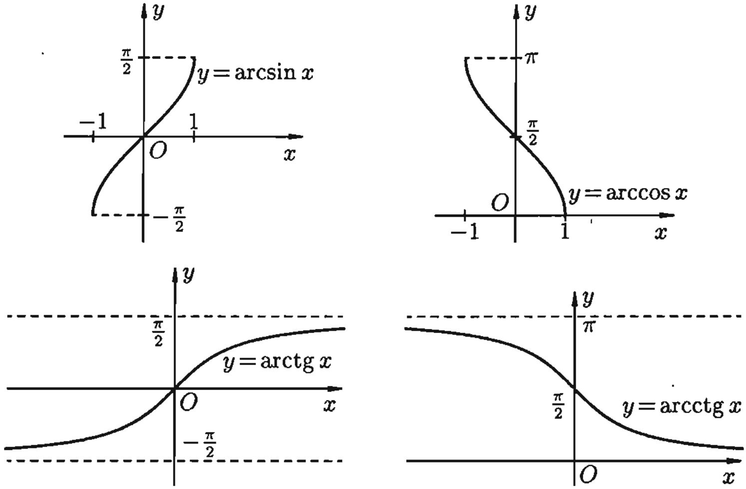

Рис. 108

Примерами *неэлементарных* функций могут служить функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \dots$$

§ 15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

15.1. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),} \tag{15.1}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,…, x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \ldots, n^2+1, \ldots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n — неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n — не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.

Другой способ задания числовых последовательностей — *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

15.2. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (15.2)$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к a*.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

Пример 15.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

○ Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $\forall\varepsilon > 0$ *найдется* натуральное число N, такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Оно справедливо для всех $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. для всех $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа x, обозначаемая $[x]$, есть наибольшее целое число, не превосходящее x; так $[3] = 3$, $[5{,}2] = 5$).

Если $\varepsilon > 1$, то в качестве N можно взять $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$. ●

Заметим, что число N зависит от ε. Так, если $\varepsilon = \dfrac{3}{26}$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{3}{26}}\right] = \left[\frac{26}{3}\right] = \left[8\frac{2}{3}\right] = 8;$$

если $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right] = [100] = 100.$$

Поэтому иногда записывают $N = N(\varepsilon)$.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (15.2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

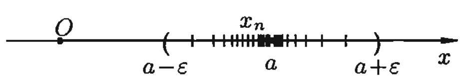

Рис. 109

Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a (см. рис. 109).

Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел.*** Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся.*** Таковой является, например, последовательность v_n (см. с. 128).

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел, равный числу c, т. е. $\lim c = c$. Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство (15.2). Имеем $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

15.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 15.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $a \leqslant b$.

❑ Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $x_n > \frac{a+b}{2}$ и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $y_n < \frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n > y_n$. Это противоречит условию $x_n \leqslant y_n$. Следовательно, $a \leqslant b$. ■

Теорема 15.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots \\ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (15.3)$$

Из равенства (15.3) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\ldots$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (15.4)$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (15.3) на единицу; правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$