Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3. \tag{15.5}$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{15.6}$$

Число e называют *неперовым* числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}718281828459045\dots$). Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Найдем связь между натуральным и десятичным логарифмами. По определению логарифма имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

Пользуясь десятичными логарифмами, находим $\lg e \approx 0{,}4343$. Значит, $\lg x \approx 0{,}4343 \cdot \ln x$. Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0{,}4343}\lg x$, т. е. $\ln x \approx 2{,}3026 \lg x$. Полученные формулы дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in \mathbb{N}$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ \underbrace{|x - x_0| < \delta,\ \ x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon\right) \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 110). Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 16.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

○ Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$, т. е. $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, видим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta\left(= \frac{\varepsilon}{2}\right)$, выполняется неравенство $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$. ●

Пример 16.2. Доказать, что, если $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

❍ Решение: Для $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $\forall \delta > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$. ●

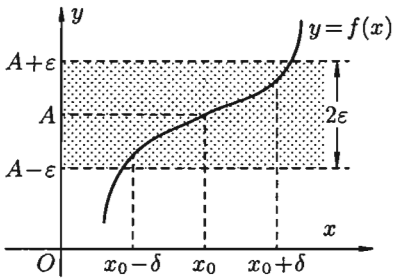

Рис. 110

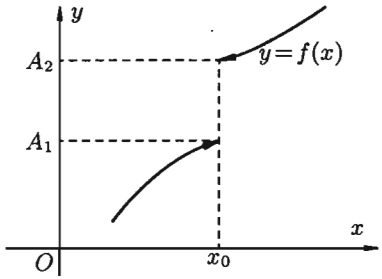

Рис. 111

16.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon\Big) \iff$$
$$\iff \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то существует предел $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $A = f(x_0 - 0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

16.3. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это определение можно записать так:

$$\boxed{\left(\forall\varepsilon>0\,\exists M>0\,\forall x\colon\ |x|>M \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=A.}$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то — $A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 112).

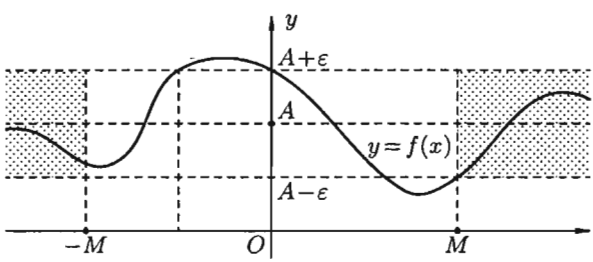

Рис. 112

16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-x_0| < \delta$, выполняется