

сливается с прямой $y = x$ (рис. 115). На рисунках 116–118 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.

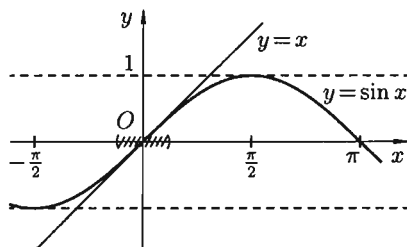


Рис. 115. $\sin x \approx x$ ($x \rightarrow 0$)

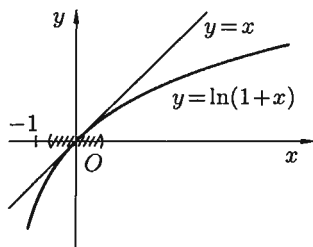


Рис. 116. $\ln(1+x) \approx x$ ($x \rightarrow 0$)

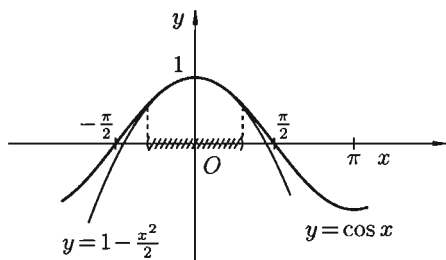


Рис. 117. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$)

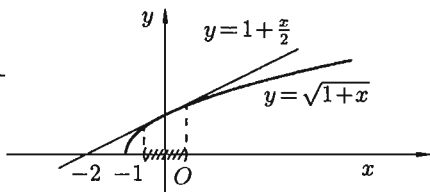


Рис. 118. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ($x \rightarrow 0$)

Пример 18.12. Найти приближенное значение для $\ln 1,032$.

○ Решение: $\ln 1,032 = \ln(1 + 0,032) \approx 0,032$ Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $\ln 1,032 = 0,031498 \dots$ ●

§ 19. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

19.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (19.1)$$

Равенство (19.1) означает выполнение трех условий:

- 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
- 2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$;
- 3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (19.1).

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то равенство (19.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0). \quad (19.2)$$

Это означает, что *при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0 .*

Например, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e$. В первом равенстве функция и предел поменялись местами (см. (19.2)) в силу непрерывности функции e^x .

Пример 19.1. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1. \quad \bullet \end{aligned}$$

Отметим, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

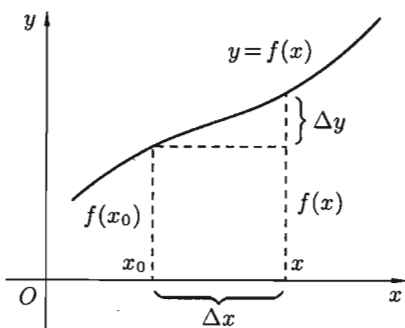


Рис. 119

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$. Для любого $x \in (a; b)$ разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента x в точке x_0* и обозначается Δx («дельта x »): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 119).

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Занишем равенство (19.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \rightarrow x_0$ и $x - x_0 \rightarrow 0$ одинаковы, то равенство (19.1) принимает вид $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или

$$\boxed{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.} \quad (19.3)$$

Полученное равенство (19.3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (19.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (19.1)), либо второе (равенство (19.3)) определение.

Пример 19.2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение: Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy :

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (19.3), функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x . ●

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos x$ также непрерывна.

19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в интервале** (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в точке $x = a$ непрерывна справа (т. е. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$), а в точке $x = b$ непрерывна слева (т. е.

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)).$$

19.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции**. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере

ре одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0 .

Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$ (см. рис. 120).

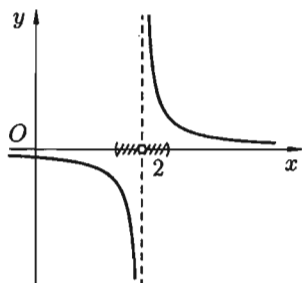


Рис. 120

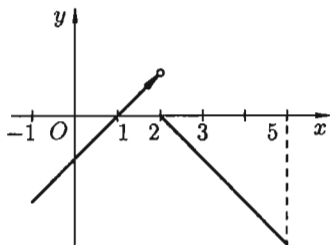


Рис. 121

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

определена в точке $x_0 = 2$ ($f(2) = 0$), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв (см. рис. 121), т. к. эта функция не имеет предела при $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция (см. рис. 122)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ — точка разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.

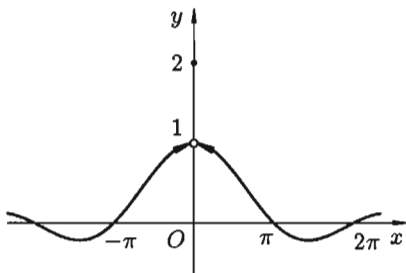


Рис. 122

☞ Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**; б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва**. Величину $|A_1 - A_2|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

☞ Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше (см. рис. 120). $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ — точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1 - 0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранился, функция станет непрерывной.

Пример 19.3. Дана функция $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

○ Решение: Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 3, \\ -1 & \text{при } x < 3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$. ●

19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теоремы о непрерывности функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Теорема 19.1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

□ Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве X и x_0 — любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = f(x_0) \cdot \varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x) \cdot \varphi(x)$ в точке x_0 . ■

Теорема 19.2. Пусть функции $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0 .

□ В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \rightarrow x_0$ имеем $u \rightarrow u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 . ■

Теорема 19.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ оси Ox , то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy (без доказательства).

Так, например, функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 19.1, есть функция непрерывная для всех значений x , кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arccotg} x$, в силу теоремы 19.3, непрерывны при всех значениях x , при которых эти функции определены.

☉ Можно доказать, что *все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x , для которых они определены.*

⇒ Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: *всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 19.4. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x}$.

○ Решение: Функция $2^{\operatorname{ctg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x} = 2^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2. \quad \bullet$$

19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1 , а наименьшее m — в точке x_2 . Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Следствие 19.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

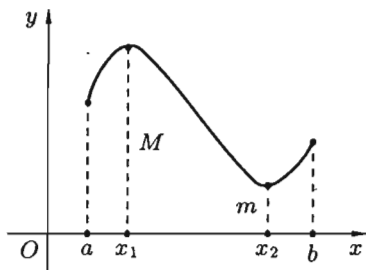


Рис. 123

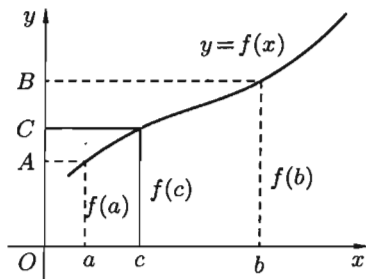


Рис. 124

Теорема 19.5 (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B .

Геометрически теорема очевидна (см. рис. 124).

Для любого числа C , заключенного между A и B , найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Следствие 19.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка c , в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox (см. рис. 125).

Следствие 19.2 лежит в основе так называемого «метода половинного деления», который используется для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$.

Утверждения теорем 19.4 и 19.5, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке $[a; b]$, а в интервале $(a; b)$, либо функция на отрезке $[a; b]$ имеет разрыв.

Рисунок 126 показывает это для следствия теоремы 19.5: график разрывной функции не пересекает ось Ox .