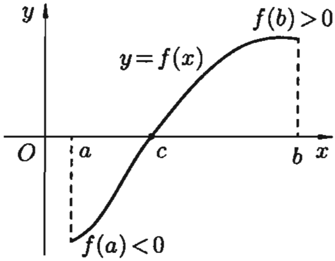

Рис. 125

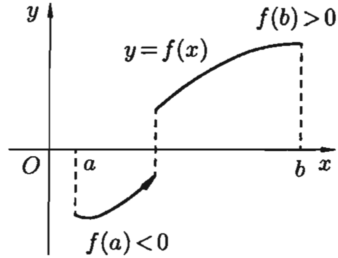

Рис. 126

Пример 19.5. Определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ корень уравнения $e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$, принадлежащий отрезку $[0; 1]$, применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a = 0$, $b = 1$.

Шаг 2. Вычисляем $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то x — корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x) \neq 0$ если $y \cdot \varphi < 0$, то полагаем $b = x$, $\psi = y$, иначе полагаем $a = x$, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x = \dfrac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a; b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x = 0{,}29589$. ●

§ 20. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

20.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки*. Требуется найти скорость движения точки.

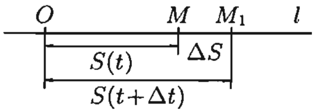

Рис. 127

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$.

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (20.1)$$

Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 128).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей*.

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x; y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис. 129). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

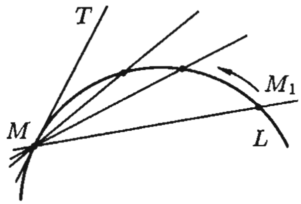

Рис. 128

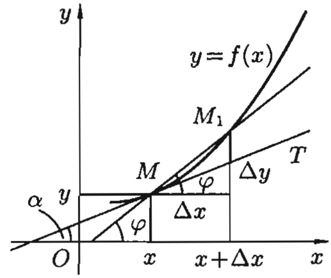

Рис. 129

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (20.2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени* t равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \qquad (20.3)$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени* t равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \qquad (20.4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0; 0)$ и $M(x; 0)$, то *линейная плотность стержня в точке* x есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \qquad (20.5)$$

Пределы (20.1)–(20.5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg} \alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

(читается «V равно S штрих по t», «тангенс α равен y штрих по x» и т. д.).

20.2. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$. Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a; b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием.***

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 20.1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

– Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

– значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;

– следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$. ●

Пример 20.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение:

– Аргументу x даем приращение Δx;

– находим Δy: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

– составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

– находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t*. В этом заключается *механический смысл производной*.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса***. В этом состоит ***физический смысл производной***.

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x***. В этом заключается ***геометрический смысл производной***.

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y - y_0 = k(x - x_0))$, можно записать ***уравнение касательной***: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

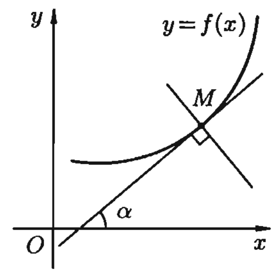

Рис. 130

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой***.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 20.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

❑ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Отсюда, по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

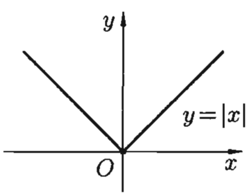

Рис. 131

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке 131 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т. е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале $(a; b)$, то функция называется ***гладкой***.

20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 20.2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

❑ Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 20.3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

❑ Пусть $y = uv$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u) \cdot (v(x)+\Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т. е. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. ■

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \to 0$ и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можно показать, что:

а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема 20.4. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq$ $\neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

❑ Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x)+\Delta v) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т. е. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. ■

Следствие 20.1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$.

Следствие 20.2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$.

20.5. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 20.5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

❑ По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u, \tag{20.6}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ■

Итак, для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.***

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.
Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 20.6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{20.7}$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (20.7) следуют равенства $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$, т. е. $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.***

Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 20.3. Найти производную функции $y = \log_2^3 \operatorname{tg} x^4$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = \operatorname{tg} q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции ($y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x$) получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \operatorname{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3. \quad ●$$

Пример 20.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

○ Решение: Обратная функция $x = y^3+1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}. \qquad \bullet$$

20.6. Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx. Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = \left(x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right) - x^n =$$

$$= n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdot + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(n\cdot x^{n-1} + \frac{1}{2}n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right) = n\cdot x^{n-1}.$$

Таким образом,

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}.$$

Например, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $x' = 1$.

Ниже (см. замечание на с. 175) будет показано, что формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (а не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx, находим приращение функции Δy: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x}-1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x.$$

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 20.5. Найти производную функции $y = 7^{x^2-4x}$.

○ Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4). \quad \bullet$$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right) \sim \dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \dfrac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример 20.6. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

○ Решение: $y' = \dfrac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \dfrac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}$. ●

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Для функции $y = \sin x$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x,$$

т. е. $y' = \cos x$ или $(\sin x)' = \cos x$.

Найдем производную функции $y = \cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x,$$

т. е. $(\cos x)' = -\sin x$.

Для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Проделав аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Этот результат можно получить иначе:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 20.7. Найти производную функции $y = \cos 2x$.

◐ Решение: $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$. ●

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Эту формулу можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 20.8. Найти производные функций: 1) $y = \arccos x^2$; 2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = (1+5x-3x^3)^4$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$; 5) $y = \log_2^3(3+2^{-x})$.

Решение: 1) $(\arccos x^2)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $(x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$;

3) $((1+5x-3x^3)^4)' = 4(1+5x-3x^3)^3 \cdot (5-9x^2)$;

4) $(\arccos\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $(\log_2^3(3+2^{-x}))' = 3\log_2^2(3+2^{-x}) \cdot \dfrac{1}{(3+2^{-x})\ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$. ●

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\cdot\ln x})' = e^{\alpha\cdot\ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot e^{\alpha\cdot\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

т. е. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$$(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

при всех $x \neq 0$.

Пример 20.9. Показать, что функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ удовлетворяет уравнению $x^3 \cdot y' + 1 = x^4$.

○ Решение: Находим y':

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} + 0,$$

т. е. $y' = x - \frac{1}{x^3}$. Подставляем значение y' в данное уравнение:

$$x^3 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right) + 1 = x^4, \quad \text{т. е.} \quad x^4 - 1 + 1 = x^4, \quad 0 = 0.$$

Функция удовлетворяет данному уравнению. ●

20.7. Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус («цепная линия»);

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ и $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический тангенс и котангенс, где e — неперово число.

На рисунках 132–135 показаны графики гиперболических функций.

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости:

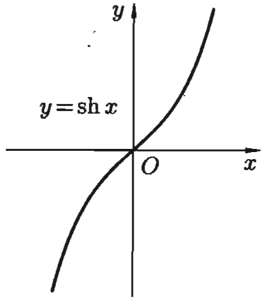

Рис. 132

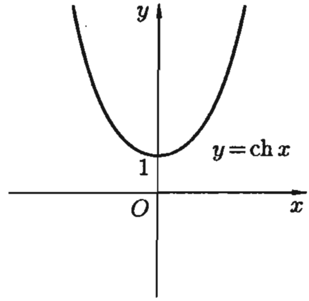

Рис. 133

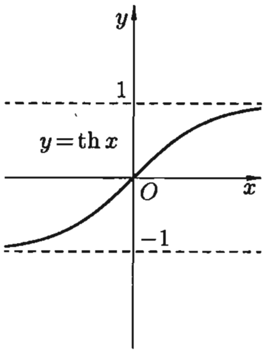

Рис. 134

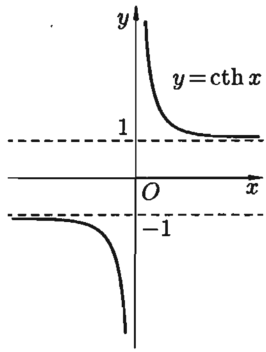

Рис. 135

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y;$

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y;$

$\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y};$

$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций.

Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций (см. рис. 137) аналогична интерпретации тригонометрических функций (см. рис. 136).

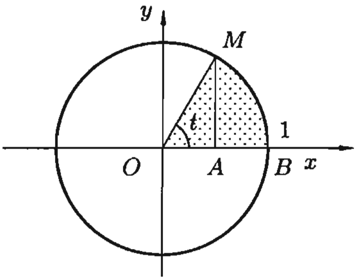

Рис. 136. Параметрические уравнения $x = \cos t$ и $y = \sin t$ определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$, причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$

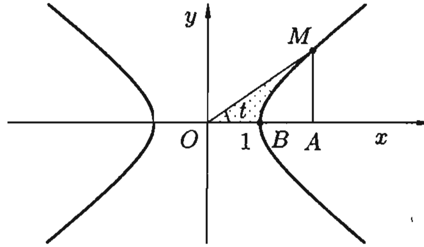

Рис. 137. Параметрические уравнения $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, т. е. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$, т. е. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, т. е. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, т. е. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

20.8. Таблица производных

Выведенные правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «x» заменен на промежуточный аргумент «u».

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;

5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при выполнении упражнений.

Пример 20.10. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

❍ Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' - (1)' = \\ = 4x^3 - 3(x^3)' + 2(x)' - 0 = 4x^3 - 9x^2 + 2. \quad \bullet$$

Надо стараться обходиться без лишних записей.

Пример 20.11. Найти производную функции $y = \dfrac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$.

❍ Решение:

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}\right)' = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2}. \quad \bullet$$

Производная найдена. В процессе решения использованы правила 2, 3 и формулы 2, 7.

Пример 20.12. Найти производную функции $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.