§ 22. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием.***

Пример 22.1. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

○ Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y':

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right). \quad ●$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая ***степенно-показательная функция*** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v\cdot\ln u, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u', \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

т. е.

$$y' = u^v\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

или

$$\boxed{(u^v)' = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.} \qquad (22.1)$$

Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример 22.2. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

❍ Решение: Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2+1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2. \qquad \bullet$$

Отметим, что запоминать формулу (22.1) необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

23.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка.*

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' $\left(\text{или } f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right), \dfrac{dy'}{dx}\right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' $\left(\text{или } f'''(x), \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример 23.1. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.