Тогда по формуле (23.2)

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \qquad \bullet$$

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле (23.2):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

запоминать которую вряд ли стоит.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

24.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{24.1}$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***. Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx,} \tag{24.2}$$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Из формулы (24.2) следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

Пример 24.1. Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x).$$

○ Решение: По формуле $dy = f'(x)\,dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))'\,dx = (6x - 2\cos(1 + 2x))\,dx.$$ ●

Пример 24.2. Найти дифференциал функции

$$y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0{,}1$.

○ Решение:

$$dy = (\ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1})'\,dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)dx.$$

Подставив $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим

$$dy\Big|_{\substack{x=0,\\ dx=0{,}1}} = \left(\frac{10}{2} + 0\right)0{,}1 = 0{,}5.$$ ●

24.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 138). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.

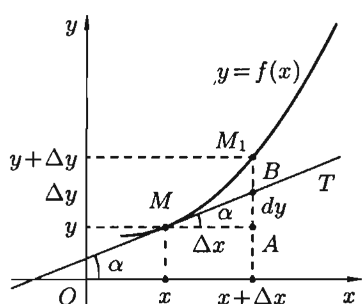

Рис. 138

Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем $dy = AB$, т. е. ***дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.***

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

24.3. Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x)\,dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y=c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy=c'\,dx=0\cdot dx=0$.

Теорема 24.1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

❑ Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v\cdot u'dx + u\cdot v'dx = v\,du + u\,dv. \quad \blacksquare$$

Теорема 24.2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

❑ Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получаем $y'_x dx = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x\,dx = dy$ и $u'_x\,dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du. \quad \blacksquare$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x, поэтому, вообще говоря, $du \neq \neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

24.4. Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\,dv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x\,dx$, если $y = f(x)$;
5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
6. $dc = 0$;
7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du$;
8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du$;
9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
10. $d(\sin u) = \cos u\,du$;
11. $d(\cos u) = -\sin u\,du$;
12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;
13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u}\,du$;
14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2}\,du$;
17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2}\,du$;
18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u\,du$;
19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u\,du$;
20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$;
21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\,du$.

24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{24.3}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (24.3) широко применяется в вычислительной практике.

Пример 24.3. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение: Применяем формулу (24.3): $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01.$$

Итак, $\Delta y \approx 0{,}01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$$\begin{aligned}\Delta y &= ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2);\end{aligned}$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = 0{,}001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$|\Delta y - dy| = |0{,}010006 - 0{,}01| = 0{,}000006.$$

Подставляя в равенство (24.3) значения Δy и dy, получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

или

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.} \tag{24.4}$$

Формула (24.4) используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример 24.4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

○ Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле (24.4) имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1{,}05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810.$$ ●

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (24.4) не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x; x + \Delta x]$ (см. с. 196).

Пример 24.5. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \frac{g_л \cdot t^2}{2}$, $g_л = 1{,}6$ м/с^2.

○ Решение: Требуется найти $H(10{,}04)$. Воспользуемся приближенной формулой ($\Delta H \approx dH$)

$$H(t + \Delta t) \approx H(t) + H'(t) \cdot \Delta t.$$

При $t = 10$ *с* и $\Delta t = dt = 0{,}04$ с, $H'(t) = g_л t$, находим

$$H(10{,}04) \approx \frac{1{,}6 \cdot 100}{2} + 1{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}04 = 80 + 0{,}64 = 80{,}64 \text{ (м)}.$$ ●

Задача (для самостоятельного решения). Тело массой $m = 20$ кг движется со скоростью $v = 10{,}02$ м/с. Вычислить приближенно кинетическую энергию тела $\left(E_к = \frac{mv^2}{2};\ E_к(10{,}02) \approx 1004 \text{ (Дж)}\right)$.

24.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — *независимая переменная*. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ есть также функция x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее *вторым дифференциалом* (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)' \cdot dx = f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е.
$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{24.5}$$
Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:
$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$. В частности, при $n = 1,\ 2,\ 3$ соответственно получаем:
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},$$
т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — ***функция от какой-то другой независимой переменной***, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Используя формулу дифференциала произведения $(d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv)$, получаем:
$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x)\,dx \cdot dx + f'(x) \cdot d^2x,$$
т. е.
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x) \cdot d^2x. \tag{24.6}$$

Сравнивая формулы (24.5) и (24.6), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x) \cdot d^2x$.

Ясно, что если x — независимая переменная, то
$$d^2x = d(dx) = d(1 \cdot dx) = dx \cdot d(1) = dx \cdot 0 = 0$$
и формула (24.6) переходит в формулу (24.5).

Пример 24.6. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

○ Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (24.5) имеем $d^2y = 9e^{3x}\,dx^2$. ●

Пример 24.7. Найти d^2y, если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

◑ Решение: Используем формулу (24.6): так как

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad dx = 3t^2\,dt, \quad d^2x = 6t\,dt^2,$$

то

$$d^2y = 2dx^2 + 2x \cdot 6t\,dt^2 = 2(3t^2\,dt)^2 + 2(t^3+1)6t\,dt^2 = \\ = 18t^4\,dt^2 + 12t^4\,dt^2 + 12t\,dt^2 = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3+1)^2$. Тогда по формуле (24.5)

$$d^2y = y'' \cdot dt^2,$$

т. е.

$$d^2y = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$

●

§ 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 25.1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

❏ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно, M и m. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a;b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутренней* точке c интервала $(a;b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x = c \in (a;b)$, т. е. $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ выполняется соотношение

$$f(c) \geqslant f(x). \tag{25.1}$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$