1. Определители.

1. Определитель **второго порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Определитель **третьего порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3. **Свойства определителей. 1.** Определитель равен нулю, если он содержит: две одинаковые или пропорциональные строки; строку (столбец) из нулей. **2.** Определитель не изменится, если к любой его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число. **3.** Разложение определителя по любой строке (столбцу):

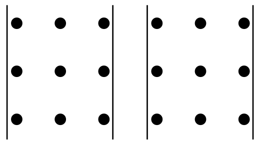
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = ... = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

4. **Способы вычисления определителя третьего порядка.**

а). Правило **Саррюса (дополнения)**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

б). Правило **треугольников:**



\+ −

в). Разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. Действия над матрицами. Обратная матрица.

1. **Матрицей** A порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из действительных чисел и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

2. **Сумма (разность)** матриц *одного порядка* $C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

3. **Произведение** матрицы на число $B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}\quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

4. **Произведением** AB матриц A и B называется матрица $C = AB$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}):$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы порядка $m \times k$ на матрицу порядка $k \times n$ получится матрица порядка $m \times n$.
Некоммутативность (неперестановочность) умножения матриц: $AB \neq BA$.
5. Если A - невырожденная *квадратная* матрица (определитель матрицы $|A| \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1}, называемая **обратной** к матрице A, такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица.
Чтобы **найти** A^{-1} необходимо: - вычислить определитель $\Delta = |A|$ матрицы A; - найти алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента a_{ij} матрицы A; - составить из чисел A_{ij} матрицу A^*; - транспонируя матрицу A^*, составить матрицу $\left(A^*\right)^T$; - умножить матрицу $\left(A^*\right)^T$ на число $\frac{1}{\Delta}$: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(A^*\right)^T$; - делаем проверку $A^{-1}A = E$.

3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

1. **Правило Крамера:** если определитель матрицы системы не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta -$определитель матрицы системы; $\Delta_k -$определитель, получаемый из определителя Δ заменой $k -$го столбца столбцом свободных членов, $k = 1,2,3$.
2. **Матричный способ:** система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой $X = A^{-1}B$.

3. **Метод Гаусса** заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right\rangle \Uparrow$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований: **1.** В $\overline{A}$ можно менять местами строки. **2.** Можно в $\overline{A}$ менять местами столбцы *слева от прямой черты.* **3.** К одной строке $\overline{A}$ можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.
Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные.

4. Векторы.

Вектором называется направленный отрезок.

Координаты вектора с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (X; Y; Z).$$

Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Проекция вектора на ось *u*: $np_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos\varphi$, φ - угол между осью u и вектором $\vec{AB}$.

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|}; \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|}; \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|};\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Сумма (разность) векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$: $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

Произведение вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **на число** λ: $\vec{b} = \lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$.

Условие коллинеарности векторов: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Разложение вектора $\vec{d}$ **по векторам** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ - координаты вектора $\vec{d}$ в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Нелинейные операции над векторами.

1. **Скалярное произведение векторов** – *число* $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$; 1). проекция вектора на вектор $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$; 2). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Свойства: 1). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2). $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$; 3). скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$; 4). $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; 5). $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0;\ \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$

Условие перпендикулярности векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Угол между векторами:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2. **Векторное произведение -** *вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, определяемый условиями: 1). $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$; 2). $\vec{c}$ перпендикулярен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$; 3). вектор $\vec{c}$ направлен так, что с его конца переход от первого сомножителя $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден как переход против часовой стрелки.

В координатах, если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Свойства векторного произведения: 1). $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$; 2). $\vec{a} \times \vec{a} = 0$; 3). $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; 4). $\vec{i} \times \vec{i} = 0$, $\vec{j} \times \vec{j} = 0$, $\vec{k} \times \vec{k} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$. **Геометрически** модуль векторного произведения – площадь параллелограмма: $S_{пар} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$.

3. Смешанное произведение векторов – *число* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \;= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды: $V_{пар} = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $V_{пир} = \pm(1/6)\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Условие компланарности векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Раздел 2. Аналитическая геометрия.

1. Простейшие задачи на плоскости.

Уравнение линии на плоскости $F(x, y) = 0$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Площадь треугольника *ABC* с вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Координаты точки M, **делящий отрезок** M_1M_2 **в данном отношении** $\lambda = \dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$**:**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координаты середины отрезка ($\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$.

2. Прямая на плоскости.

Уравнения прямой:

общее: $Ax + By + C = 0$, вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен прямой;

с угловым коэффициентом: $y = kx + b$;

проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ *с данным угловым коэффициентом* k: $y - y_0 = k(x - x_0)$;

проходящей через две точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Угол между двумя прямыми, заданными: *общими* уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

уравнениями *с угловым коэффициентом* $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|.$$

Условия параллельности прямых: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, $k_1=k_2$.

Условия перпендикулярности прямых: $A_1A_2+B_1B_2=0$, $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ **до прямой** $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Кривые 2 порядка.

Уравнение второго порядка $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ задает: *окружность* при $A=B$; *эллипс* при $AB>0$; *гиперболу* при $AB<0$; параболу, если $A=0$ или $B=0$. **Уравнения окружности:** с центром в т. $C(x_0;y_0)$ и радиусом R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$; с центром в т. $O(0;0)$: $x^2+y^2=R^2$. **Каноническое уравнение эллипса:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **Каноническое уравнение гиперболы:** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **Канонические уравнения параболы:** $y^2=\pm 2px,\ p>0;\ \ x^2=\pm 2py,\ p>0.$

4. Плоскость в пространстве.

Уравнения плоскости:

проходящей через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ *перпендикулярно вектору* нормали $\vec{N}=(A,B,C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

общее:

$$Ax+By+Cz+D=0;\ \vec{N}=(A,B,C)\ \text{- вектор нормали;}$$

в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;$$

проходящей через три данные точки $M(x_1,y_1,z_1),M(x_2,y_2,z_2),M(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_o)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5. Прямая в пространстве.

Уравнения прямой:

как *линии пересечения двух плоскостей*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ *параллельно вектору* $\vec{P} = (m, n, p)$: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

- канонические уравнения прямой;
параметрические:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0; \end{cases}$$

проходящей через две данные точки $M(x_1, y_1, z_1)$, $M(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между прямыми:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right| \cdot \left|\vec{P}_2\right|} = = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$:

$$d = \frac{\left|S_{par}\right|}{\left|\vec{P}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{P}\right|}{\left|\vec{P}\right|}.$$

6. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.

Условие параллельности прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Раздел 3. Пределы

Определенные выражения при нахождении пределов: $\infty+\infty=\infty$; $\infty\pm A=\infty$; $\infty\cdot A=\infty(A\neq 0)$;

$\frac{A}{\infty}=0(A\neq 0)$; $\frac{A}{0}=\infty(A\neq 0)$; $A^{\infty}=\begin{cases}\infty, A>1,\\ 0, A<1.\end{cases}$

Неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}.

Раскрытие неопределенностей.

1. $\frac{\infty}{\infty}$. Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби. При этом $\frac{A}{x^k}\to 0$ при $x\to\infty$.

2. $\infty-\infty$. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty-\infty$ приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

3. $\frac{0}{0}$. **а).** Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль. **б).** Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму, а разность кубических корней – на неполный квадрат суммы или сделать замену. **в). Первый замечательный предел** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$;

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=1$.

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha=0$. **Эквивалентные бесконечно малые:** $\sin\alpha\sim\alpha$; $\sin^2\alpha\sim\alpha^2$; $tg\alpha\sim\alpha$; $1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$; $\arcsin\alpha\sim\alpha$; $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$; $e^{\alpha}-1\sim\alpha$; $a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a$; $(1+\alpha)^n-1\sim n\alpha$; $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{2}$.

Второй замечательный предел (неопределенность 1^{∞}). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}$.

Раздел 4. Производная. Дифференциал.

Производная от функции $y = f(x)$ в точке x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$: $dy = y'dx$.

Правила дифференцирования.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$. 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $c' = 0$. 2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; $x' = 1$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$. 4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$. 5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$. 7. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 8. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. 9. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 11. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$. 12. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f_u'(u(x)) \cdot u'(x)$.

.

Логарифмическая производная: $\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Вторая производная: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Производная $n-$**го порядка:** $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Производная показательно-степенной функции: $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln uv'$.

Производная неявной функции.

Если функция $y = f(x)$ задается соотношением $F(x, y) = 0$, то говорят, что она **задана неявно.** При нахождении производной необходимо помнить, что y является функцией аргумента x.

Пример. $\left(x^2 y\right)' = 2xy + x^2 y'$.

Производная параметрически заданной функции.

Параметрически заданная функция $y = f(x)$: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Ее производная: $y_x' = \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}$.

Вторая производная параметрически заданной функции: $y_{xx}'' = \left(y_x'\right)_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{y_{tt}''x_t' - y_t'x_{tt}''}{x_t'^3}$.

Раздел 5. Приложения производной.

1. Правило Лопиталя.

Если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ и т.д.}$$

2. Монотонность функции. Экстремумы. Выпуклость графика функции. Асимптоты.

Монотонность: функция возрастает (убывает), если $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$. Точки, подозрительные на экстремум (**критические**): $f'(x)=0,$ $f'(x)$ не существует. **1 достаточное условие существования экстремума.** Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **2 достаточное условие существования экстремума.** Если в критической точке x_0 вторая производная функции $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **Выпуклость** вверх (вниз) на (a,b), если на (a,b) $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$). **Точки, подозрительные на перегиб**: $f''(x)=0,$ $f''(x)$ не существует. **Достаточное условие существования перегиба.** Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб - изменение направления выпуклости функции – существует. **Вертикальные асимптоты.** Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\pm\infty$ и (или) $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\pm\infty$.

Наклонные асимптоты графика $f(x)$: $y=kx+b,$ где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$

Горизонтальная асимптота при $k=0$: $y=b.$ **Наибольшее и наименьшее значения функции** $f(x)$ на отрезке находятся либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.