1. Исследование и построение графиков функций.

Схема исследования графика функции.

1. Найти область определения функции, множество значений (по возможности), точки разрывов, вертикальные асимптоты.

◊ Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ и (или) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. Ищем точки бесконечных разрывов функции, в которых $y = \infty$.

2. Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.

◊ $y(-x) = y(x)$ - четная функция, $y(-x) = -y(x)$ - нечетная функция..

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

4. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума.

◊ *Монотонность:* функция возрастает (убывает), если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Точки, подозрительные на экстремум (**критические**): $f'(x) = 0,\ \ f'(x)$ не существует.

1 достаточное условие существования экстремума. Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции.

5. Найти точки перегиба, определить направление выпуклости графика функции.

◊ *Выпуклость* вверх (вниз) на (a,b), если на (a,b) $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Точки, подозрительные на перегиб: $f''(x) = 0,\ \ f''(x)$ не существует.

Достаточное условие существования перегиба. Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб - изменение направления выпуклости функции – существует.

6. Найти наклонные асимптоты графика функции.

◊ *Наклонные асимптоты* графика $f(x)$: $y = kx + b,$ где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$

Горизонтальная асимптота при $k = 0$: $y = b.$

7. Построить график функции.

2. Непосредственное интегрирование.

Свойства интегралов. 1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$. 3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$. 5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблица интегралов. 1. $\int 0dx = C$. **2.** $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \ne -1)$; $\int dx = x + C$; $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$;
$\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$. **3.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$. **4.** $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. **6.** $\int \cos x dx = \sin x + C$. **7.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$. **8.** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$. **10.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$. **12.** $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$. **14.** $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$; $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$.

15. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$. **16.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$.

17. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$. **18.** $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$. **19.** $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. **21.** $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

3. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование иррациональностей.

Формула замены переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки).

$$\int f(x)dx = \left\{\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

После вычисления интеграла необходимо вернуться к старой переменной x.

При **интегрировании выражений, содержащих корни,** необходимо сделать такую подстановку, чтобы корни извлекались**. Пример.** В сумме $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ подстановка $x = t^6$, тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.

4. Замена переменной в неопределенном интеграле. Подведение функции под знак дифференциала.

Подведение под знак дифференциала. Если подынтегральное выражение содержит функцию $g(x)$ и ее производную, то эту функцию можно подвести под знак дифференциала:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x)) = \{t = g(x)\} = \int f(t)dt.$$

Таблица основных дифференциалов.

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$; $xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(x^2+b)$; $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$;

$x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4)$; $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$; $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$; $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$;

$a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x)$; $e^x dx = d(e^x)$; $\sin xdx = -d(\cos x)$; $\cos xdx = d(\sin x)$; $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$;

$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)$; $\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx)$; $\sin 2xdx = d(\sin^2 x) = -d(\cos^2 x)$; $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.

Если интеграл $\int f(x)dx$ является табличным: $\int f(x)dx = F(x) + C$, то **интеграл от функции линейного аргумента** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$. Здесь $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$.

5. Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям неопределенном интеграле:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Интегралы, вычисляемые по частям.

I группа. $\int x^n e^x dx$; $\int x^n \sin xdx$; $\int x^n \cos dx$. Здесь $u = x^n$,

$dv = \{e^x dx; \sin xdx; \cos xdx\}$. Интегрирование по частям n раз.

II группа. $\int x^n \ln xdx$; $\int x^n \arcsin xdx$;

$\int x^n \arccos xdx$. Здесь $u = \{\ln x; \arcsin x; \arccos x\}$, $dv = x^n$. Один раз по частям.

III группа.

$\int e^{ax} \sin bxdx$; $\int e^{ax} \cos b\,x\,d$.. Здесь $u = e^{ax}$, $dv = \{\sin bx; \cos bx\}$. Интегрирование по частям два раза, далее интеграл находится алгебраически, появляясь в правой части с коэффициентом, отличным от нуля.

6. Интегрирование квадратных трехчленов и рациональных дробей.

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в знаменателе, находятся выделением полного квадрата из трехчлена: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \text{ и } \textbf{линейной заменой переменной } t = x + \frac{b}{2a}.$$

Если знаменатель $Q(x)$ правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на множители $Q(x) = (x-a)^n (x^2 + px + q)^m$ (квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней), то данную дробь можно представить виде суммы **простых дробей** в следующем виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots.\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \ldots.\frac{B_m x + C_m}{(x^2 + px + q)^m}.$$

Разложение квадратного трехчлена: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 - корни трехчлена

7. Интегрирование тригонометрических функций.

При нахождении **интегралов вида** $\int \sin^m x \cos^n xdx$:

а). если степень m у синуса нечетная, то применяют подстановку $\cos x = t$;

б). если степень n у косинуса нечетная, то применяют подстановку $\sin x = t$;

в). Если m и n - четные, то применяют формулы понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

Если под интегралом содержится **произведение синуса и косинуса различных аргументов**, то применяют формулы преобразования произведения в сумму: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

При нахождении **интегралов вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R - рациональная дробь, применяют **универсальную подстановку** $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $x = 2arctgt$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

В **интегралах** $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, $\int R(tgx)dx$ применяют подстановку $tgx = t$, тогда $x = arctgt$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$.

8. Определенный интеграл.

Свойства определенного интеграла. 1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. 2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. 3. Линейность: $\int\limits_a^b (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x))dx = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm c_2 \int\limits_a^b f_2(x)dx$. 4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (аддитивность).

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Замена переменных в определенном интеграле: $\int\limits_a^b f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \psi(x); t_1 = \psi(a), t_2 = \psi(b) \end{matrix} \right\} = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле: $\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

9. Приложения определенного интеграла. Площади и длины кривых.

Площадь плоской фигуры, ограниченной: а). кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$; б). кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x), x \in [a,b]$: $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$; в). линией, заданной в параметрическом виде $x = x(t), \quad y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$; г). линией, заданной в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$.

Длина дуги кривой: а). в прямоугольной системе координат $y = f(x), a \le x \le b$: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$; б). в параметрическом виде $x = x(t), \quad y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$: $l = \int\limits_a^b \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$; в). в полярной системе координат $r = r(\varphi)$: $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной: а). линиями $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$: $V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$; б). линиями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ на $[a,b]$: $V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной: а). линиями $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$: $V_{Oy} = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$; б). линиями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ на $[a,b]$: $V_{Oy} = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)dx$.

10. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

Алгоритм нахождения общего решения:

1. Производная представляется в виде отношения дифференциалов: $y' = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.
2. Обе части уравнения умножаются на dx: $dy = f(x)g(y)dx$.
3. Каждую функцию переносим к дифференциалу того же аргумента. Для этого разделим уравнение на функцию $g(y)$, стоящую у дифференциала другого аргумента: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.
4. Интегрируем последнее уравнение. Получаем общий интеграл (общее решение в неявной форме):

$$\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

11. Дифференциальные уравнения первого порядка. Однородное уравнение.

Однородное уравнение. Уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется *однородным,* если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одной и той же степени: $M(tx,ty) = t^k M(x,y)$, $N(tx,ty) = t^k N(x,y)$.

Однородное уравнение подстановкой $y = zx$, где $z = z(x)$ - новая функция, **приводится к уравнению с разделяющимися переменными.** Тогда $y' = xz' + z$ или $dy = xdz + zdx$.

Однородное уравнение можно также представить в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, разделив обе части уравнения на наивысшую степень x. Тогда $z = \frac{y}{x}$, $y' = xz' + z$ ($dy = xdz + zdx$). Вновь получаем **уравнение с разделяющимися переменными.**

12. Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейное уравнение 1 порядка.

Уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ ($x' + p(y)x = q(y)$), содержащее искомую функцию $y(x)$ (или $x(y)$) и ее производную в качестве членов первого порядка, называется **линейным.**

Метод Лагранжа. Вначале решается **однородное** линейное уравнение $y' + p(x)y = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $y = Cy(x)$ - его общее решение. Тогда общее решение уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ ищется в виде $y = u(x)y(x)$, где $u(x)$ - неизвестная функция. Находим y' и подставляем y, y' в искомое уравнение. Интегрируя, находим функцию $u(x)$ и подставляем ее в $y = u(x)y(x)$.

13. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Если уравнение 2 порядка $F(x,y,y',y'')=0$ содержит неполный набор аргументов, то возможно понизить порядок равнения до первого.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием.

Уравнение второго порядка $F(x,y',y'')=0$, **не содержащее функцию** y, подстановкой $y'=z(x), y''=z'(x)$ приводится к уравнению первого порядка $F(x,z,z')=0$.

Уравнение вида $F(y,y',y'')=0$, **не содержащее аргумента** x, подстановкой $y'=z(y),\ y''=z\dfrac{dz}{dy}$ приводится к уравнению первого порядка $F(y,z,z')=0$.

Уравнение вида $F(y',y'')=0$, **не содержащее аргумента** x и **функцию** y, можно интегрировать как заменой $y'=z(x), y''=z'(x)$, так и подстановкой $y'=z(y),\ y''=z\dfrac{dz}{dy}$.

14. Комплексные числа.

Алгебраическая форма числа: $z=x+yi$, $x=\operatorname{Re} z$ - действительная часть, $y=\operatorname{Im} z$ - мнимая часть, $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица, $i^2=-1$.

Сопряженное число $\bar{z}=x-iy$.

Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме проводятся как действия над алгебраическими выражениями. При умножении $i^2=-1$, при делении дробь умножается и делится на число, комплексно сопряженное знаменателю дроби. При этом:

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2.$$

Тригонометрическая форма числа: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ - модуль числа; $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}$. Отсюда $\varphi=\arg z$ - аргумент числа.

Показательная (экспоненциальная) форма числа: $z=re^{i\varphi}$. **Формула Эйлера:** $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Действия над комплексными числами. Произведение: $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

Деление: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Возведение в степень (формула Муавра): $z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

15. Линейные однородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида $y''+py'+qy=0$, все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты p,q - постоянные величины, называется **линейным однородным.** Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения $\lambda^2+p\lambda+q=0$. Если:

а). Корни λ_1,λ_2 характеристического уравнения **действительны и различны**, то общее решение выражается формулой $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$;

б). Если действительный корень λ_1 **имеет кратность 2** ($\lambda_1=\lambda_2$), то общее решение имеет вид $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}$;

в). Если характеристическое уравнение имеет **пару однократных комплексно-сопряженных корней** $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, то общее решение имеет вид $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

16. Метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Метод неопределенных коэффициентов. Метод применим только для линейных неоднородных уравнений *с постоянными коэффициентами* и со **специальной правой частью (квазимногочленом)** $f(x) = P_n(x)e^{kx}$**,** где $k = \alpha + \beta i$ - показатель правой части.

Уравнение вида $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{kx}$, где коэффициенты p, q - постоянные величины, называется **линейным неоднородным.**

Общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y}$ - общее решение линейного однородного уравнения; $\tilde{y}$ - частное решение линейного неоднородного уравнения, которое составляется по виду правой части и зависит от значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.

а). Если $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot x^r$, где $Q_n(x)$- многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ только с неопределенными коэффициентами; r- количество корней характеристического уравнения, равных 0: $r = 0,1$.

б). Если $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$, где r- количество корней характеристического уравнения, равных α : $r = 0,1,2$.

в). Если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, то $\tilde{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x) \cdot x^r$, где r - количество корней характеристического уравнения, равных $i\beta$: $r = 0,1$.

г). Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$, то $\tilde{y} = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x) \cdot x^r$, где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены степени s, $s = \max(n, m)$; r- количество корней характеристического уравнения, равных $\alpha + i\beta$: $r = 0,1$.

17. Метод Лагранжа для линейных уравнений второго порядка (метод вариации произвольных постоянных).

Пусть дано **неоднородное уравнение** второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$. Для соответствующего **однородного уравнения** $y'' + py' + qy = 0$ найдем общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где C_1 и C_2 - неизвестные функции от x. Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$