Линейная алгебра

1. Определители.

1. Определитель **второго порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Определитель **третьего порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений.

Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

1. **Правило Крамера:** если определитель матрицы системы не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы; Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k – го столбца столбцом свободных членов, $k = 1,2,3$.

2. **Матричный способ:** система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой $X = A^{-1}B$.

3. **Метод Гаусса** заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right\rangle \Uparrow$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований: 1. В $\overline{A}$ можно менять местами строки. 2. Можно в $\overline{A}$ менять местами столбцы *слева от прямой черты.* 3. К одной строке $\overline{A}$ можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные.

3. Векторы.

Вектором называется направленный отрезок.

Координаты вектора с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a}=\vec{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(X;Y;Z).$$

Длина вектора:

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Проекция вектора на ось *u*: $пр_u\vec{AB}=|\vec{AB}|\cos\varphi$, φ - угол между осью u и вектором $\vec{AB}$.

Направляющие косинусы: $\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$; $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Сумма (разность) векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$: $\vec{c}=\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$.

Произведение вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ **на число** λ: $\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$.

Условие коллинеарности векторов: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

Разложение вектора $\vec{d}$ **по векторам** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где α,β,γ - координаты вектора $\vec{d}$ в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4. Нелинейные операции над векторами.

Скалярное произведение векторов – *число* $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$;

Условие перпендикулярности векторов: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Угол между векторами:

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Векторное произведение - *вектор* $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, определяемый условиями: 1). $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$; 2). $\vec{c}$ перпендикулярен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$; 3). вектор $\vec{c}$ направлен так, что с его конца переход от первого сомножителя $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден как переход против часовой стрелки.

В координатах, если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right\}.\quad|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2}.$$

Смешанное произведение векторов – *число* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})==\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$.

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды: $V_{пар}=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $V_{пир}=\pm(1/6)\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Условие компланарности векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Аналитическая геометрия

1. Простейшие задачи на плоскости.

Уравнение линии на плоскости $F(x,y)=0$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Координаты точки M **, делящий отрезок** M_1M_2 **в данном отношении** $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$ **:**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

2. Прямая на плоскости.

Уравнения прямой:

общее: $Ax+By+C=0$, вектор $\vec{n}=(A,B)$ перпендикулярен прямой;

с угловым коэффициентом: $y=kx+b$;

проходящей через данную точку $M(x_0,y_0)$ *с данным угловым коэффициентом* k: $y-y_0=k(x-x_0)$;

проходящей через две точки $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Угол между двумя прямыми, заданными: *общими* уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

Условия параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, $k_1=k_2$.

Условия перпендикулярности прямых: $A_1A_2+B_1B_2=0$, $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ **до прямой** $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Кривые 2 порядка.

Уравнение второго порядка $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ задает: *окружность* при $A=B$; *эллипс* при $AB>0$; *гиперболу* при $AB<0$; параболу, если $A=0$ или $B=0$. **Уравнения окружности:** с центром в т. $C(x_0;y_0)$ и радиусом R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$; с центром в т. $O(0;0)$:

$x^2 + y^2 = R^2$. **Каноническое уравнение эллипса:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Каноническое уравнение гиперболы:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Канонические уравнения параболы:** $y^2 = \pm 2px, p > 0$; $x^2 = \pm 2py, p > 0$.

4. Плоскость в пространстве.

Уравнения плоскости:

проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* нормали $\vec{N} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

общее:

$$Ax + By + Cz + D = 0; \ \vec{N} = (A, B, C) \text{ - вектор нормали;}$$

в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

проходящей через три данные точки $M(x_1, y_1, z_1), M(x_2, y_2, z_2), M(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_o)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Прямая в пространстве.

Уравнения прямой:
как *линии пересечения двух плоскостей*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ *параллельно вектору* $\vec{P} = (m, n, p)$: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

- канонические уравнения прямой;
параметрические:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0; \end{cases}$$

проходящей через две данные точки $M(x_1, y_1, z_1)$, $M(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между прямыми:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right|\cdot\left|\vec{P}_2\right|}==\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$:

$$d=\frac{\left|S_{par}\right|}{\left|\vec{P}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{P}\right|}{\left|\vec{P}\right|}.$$

6. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.

Условие параллельности прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Пределы

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha=0$. Эквивалентные бесконечно малые: $\sin\alpha\sim\alpha$; $\sin^2\alpha\sim\alpha^2$; $tg\alpha\sim\alpha$; $1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$; $\arcsin\alpha\sim\alpha$; $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$; $e^\alpha-1\sim\alpha$; $a^\alpha-1\sim\alpha\ln a$; $(1+\alpha)^n-1\sim n\alpha$; $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{2}$.

Производная и дифференциал

Производная от функции $y=f(x)$ в точке x:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дифференциал функции $y=f(x)$: $dy=y'dx$.

Правила дифференцирования.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$. 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $c' = 0$. 2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; $x' = 1$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$. 3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$.

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$. 5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$. 7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. 9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. 12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Логарифмическая производная: $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Вторая производная: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Производная n – го порядка: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Производная показательно-степенной функции: $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u v'$.

Производная неявной функции.
Если функция $y = f(x)$ задается соотношением $F(x, y) = 0$, то говорят, что она **задана неявно.** При нахождении производной необходимо помнить, что y является функцией аргумента x.

Производная параметрически заданной функции.
Параметрически заданная функция $y = f(x)$: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Ее производная: $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$.

Вторая производная параметрически заданной функции: $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$.

Правило Лопиталя.

Если предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ и т.д.}$$