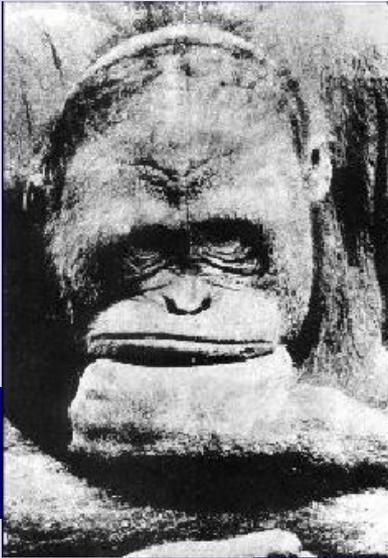


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К.
АММОСОВА»
Инженерно-технический институт

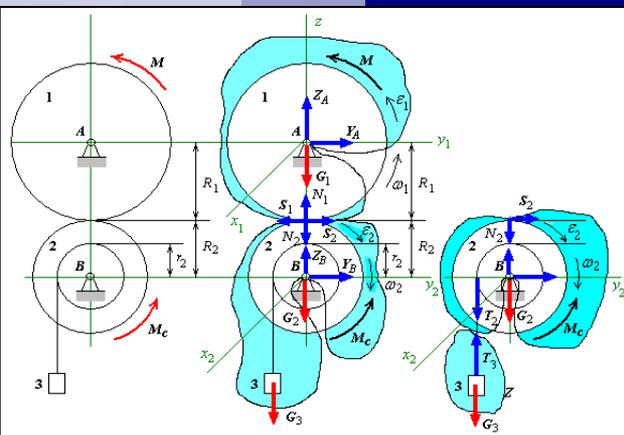


Курс лекций по теоретической механике

Статика

Лекция 4.

Центр тяжести.



Лекция 4

Сложение параллельных сил – Сложение двух параллельных сил подробно рассмотрено в демонстрационной программе автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#)). Основной результат – две параллельные и направленные в одну сторону силы приводятся к одной силе – равнодействующей, приложенной в точке, делящей прямую на расстояния, обратно пропорциональные величинам сил.

Последовательно складывая попарно параллельные силы приходим также к одной силе – равнодействующей \vec{R} : $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена. Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей. Точка пересечения этих двух линий действия равнодействующих может рассматриваться, как точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол. Такая точка называется **центром параллельных сил**

Центр параллельных сил – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

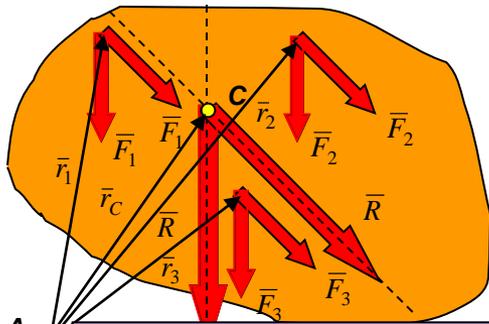
Для аналитического определения положения центра параллельных сил применим теорему Вариньона:

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum \vec{M}_{iA} \quad \text{или} \quad \vec{r}_C \times \vec{R} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Каждую из сил представим с помощью единичного вектора \vec{e} , параллельного линиям действия сил:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e} \quad \text{и} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_i = \sum F_i \vec{e}$$

Тогда предыдущее равенство примет вид: $\vec{r}_C \times (\sum F_i \vec{e}) = \sum \vec{r}_i \times F_i \vec{e}$ или после перестановки



С учетом принятых гипотез при определении положения центра тяжести можно использовать формулы для определения положения центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i} \quad \text{где } \Delta G \text{ – силы тяжести элементарных объемов.}$$

$$\vec{r}_i \vec{r}_i \times \vec{e}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

Из ра

Прое

для определения координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

Центр тяжести – центр приложения равнодействующей сил тяготения (веса) материального тела.

При определении положения центра тяжести тела используются гипотезы:

1. Линии действия сил тяготения, приложенные к отдельным частицам тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньшие радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяготения частиц тел можно пренебречь);
2. Ускорение свободного падения $g = \text{const}$ (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь)
3. Рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

Лекция 4 (продолжение – 4.2)

Определение положения центра тяжести однородных тел – Выделим элементарный объем $dV = dx dy dz$. Сила тяжести такого объема равна $dG = \gamma dV$, где $\gamma = const$ - объемный вес. Замена суммирования дискретных сил тяжести ΔG , непрерывным распределением приводит к интегральным выражениям по объему тела для определения координат центров тяжести, например, координаты x_c :

$$x_c = \frac{\int x dG}{\int dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int x dV}{\int dV}$$

Для всех трех координат получаются подобные выражения:

$$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV} \quad y_c = \frac{\int y dV}{\int dV} \quad z_c = \frac{\int z dV}{\int dV}$$

В частном случае плоского тела (постоянной толщины $H = const$), $dV = H dx dy = H dS$:

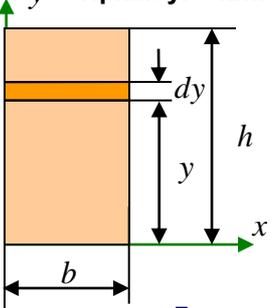
$$x_c = \frac{\iint x H dx dy}{\iint H dx dy} = \frac{\int x dS}{\int dS} \quad y_c = \frac{\int y dS}{\int dS}$$

Для линейного тела (постоянного поперечного сечения $S = const$, ось – плоская кривая), $dV = S dL$:

$$x_c = \frac{\int x S dL}{\int S dL} = \frac{\int x dL}{\int dL} \quad y_c = \frac{\int y dL}{\int dL}$$

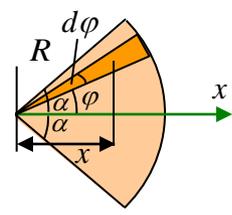
Определение положения центра тяжести простейших плоских тел:

Прямоугольник: $dS = b dy$



$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

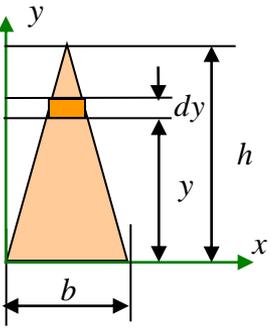
Круговой сектор:



$$dS = \frac{1}{2} R(R d\phi) = \frac{1}{2} R^2 d\phi$$

$$x_c = \frac{\int x dS}{\int dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \phi \frac{R^2}{2} d\phi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\phi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \phi \Big|_0^\alpha}{R^2 \phi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Треугольник: $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$; $b_y = \frac{h-y}{h} b$; $dS = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy$

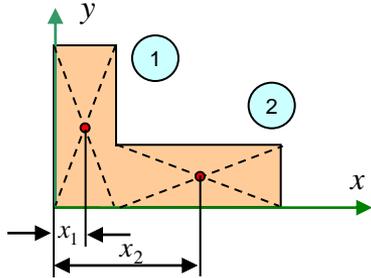


$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h-y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2} bh} = \frac{h}{3}$$

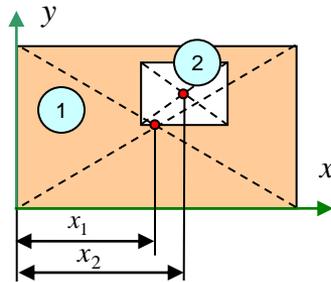
Лекция 4 (продолжение – 4.3)

Методы определения положения центра тяжести сложных фигур –

1. **Метод разбиения** – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:



$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$



2. **Метод отрицательных площадей** – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей. Например, следующая фигура вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника, может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}$$

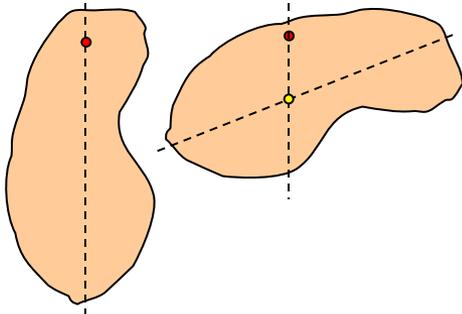
Замечание. Поскольку координата, например, x_2 , может быть отрицательна, то не следует представлять это выражение с использованием разностей:

3. **Метод симметрии** – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. См., например, положение центра тяжести кругового сектора.

$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}$$

4. **Метод интегрирования** – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. **Метод подвешивания** – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечения этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.



Лекция 4 (продолжение – 4.4)

■ **Аналитическое определение главного вектора системы** – вычисляется так же, как и ранее равнодействующая, через проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} + X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} + \dots$$

$$\bar{R}^* = (X_1 + X_2 + \dots) \bar{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \bar{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \bar{k} = R_x^* \bar{i} + R_y^* \bar{j} + R_z^* \bar{k}$$

Отсюда проекции главного вектора :

$$\begin{aligned} R_x^* &= \sum X_i; \\ R_y^* &= \sum Y_i; \\ R_z^* &= \sum Z_i; \end{aligned}$$

Направляющие косинусы главного вектора

$$\begin{aligned} \cos(\bar{R}^*, x) &= \frac{R_x^*}{R^*}; \\ \cos(\bar{R}^*, y) &= \frac{R_y^*}{R^*}. \end{aligned}$$

Модуль главного вектора :

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}$$

■ **Аналитическое определение главного момента системы** – вычисляется аналогично через проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\bar{M}_A = \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots = M_{1x} \bar{i} + M_{1y} \bar{j} + M_{1z} \bar{k} + M_{2x} \bar{i} + M_{2y} \bar{j} + M_{2z} \bar{k} + \dots$$

$$\bar{M}_A = (M_{1x} + M_{2x} + \dots) \bar{i} + (M_{1y} + M_{2y} + \dots) \bar{j} + (M_{1z} + M_{2z} + \dots) \bar{k} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$$

Отсюда проекции главного момента :

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{ix}; \\ M_y &= \sum M_{iy}; \\ M_z &= \sum M_{iz}; \end{aligned}$$

Направляющие косинусы главного мом

$$\cos(\bar{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A}$$

Модуль

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

■ **Условием равновесия пространства** $\bar{M}_A = 0; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0$ **емы сил** является

одновременное обращение главного вектора $\bar{R}^* \perp \bar{M}_A; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0$ ($\cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0$)

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} = 0$$

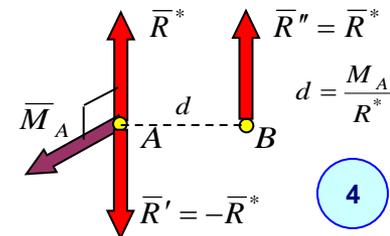
■ **Уравнения равновесия** получаются в виде системы шести уравнений из условий равновесия

с использованием выражений для проекций главного $\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0$!

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_{xi} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_{yi} &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

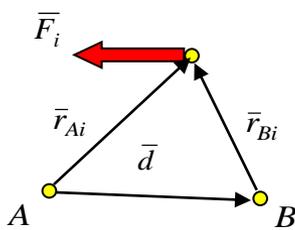
■ **Возможные случаи приведения пространственной произвольной системы сил:**

	\bar{R}^*	\bar{M}_A	Дополнительное условие	Простейший вид системы
1	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A = 0$		Условия равновесия
2	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A = 0$		Равнодействующая
3	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A \neq 0$		Пара сил
4	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A \neq 0$	$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A$	Равнодействующая
			$\bar{R}^* \not\perp \bar{M}_A$	Силовой винт (сила и пара)



Лекция 4 (продолжение – 4.5)

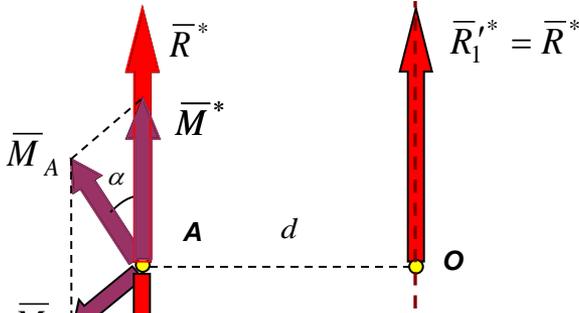
Зависимость главного момента системы от выбора центра приведения – рассмотрим как изменяется момент произвольной силы F_i при переходе от одного центра приведения к другому и запишем выражения для моментов силы относительно каждого из центров:



$$\bar{M}_A(\bar{F}_i) = \bar{r}_{Ai} \times \bar{F}_i \quad \bar{M}_B(\bar{F}_i) = \bar{r}_{Bi} \times \bar{F}_i$$

1. Свяжем между собой точки приведения A и B радиус-вектором \bar{d} : $\bar{d} = \bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}$ или $\bar{r}_{Bi} = \bar{r}_{Ai} - \bar{d}$
2. Подставим радиус-вектор \bar{r}_{Bi} в выражение для момента силы $M_B(F_i)$: $\bar{M}_B(\bar{F}_i) = (\bar{r}_{Ai} - \bar{d}) \times \bar{F}_i = \bar{r}_{Ai} \times \bar{F}_i - \bar{d} \times \bar{F}_i$
3. Просуммируем моменты всех сил $\bar{M}_B(\bar{F}_i)$: $\sum \bar{M}_B(\bar{F}_i) = \sum \bar{r}_{Ai} \times \bar{F}_i - \sum \bar{d} \times \bar{F}_i = \sum \bar{M}_A(\bar{F}_i) - \bar{d} \times \sum \bar{F}_i$
4. Получили зависимость главного момента сил от выбора центра приведения: $\bar{M}_B = \bar{M}_A - \bar{d} \times \bar{R}^*$

Рассмотрим более подробно приведение системы сил к простейшему виду с использованием этой зависимости. Пусть система приведлась в точке A к главному вектору \bar{R}^* и паре с главным моментом \bar{M}_A , имеющих между собой произвольный угол α .



1. Разложим главный момент пары \bar{M}_A на два момента \bar{M}^* и \bar{M}_1 , по двум направлениям: направлению главного вектора и перпендикулярно ему.
2. Представим пару сил с моментом \bar{M}_1 , в виде сил, равных по модулю главному вектору. Плечо этой пары будет равно: $d = \frac{M_1}{R^*}$
3. Систему сил в точке A удалим (аксиома присоединения).
4. Оставшуюся пару сил с моментом \bar{M}^* перенесем в точку приложения оставшейся силы \bar{R}^{**} (теорема о переносе пары в пространстве).

Таким образом, исходная система сил в центре приведения A в новом центре приведения O превратилась в силовой (статический) винт и более не может быть упрощена. Перпендикулярная главному вектору составляющая главного момента \bar{M}_1 исчезла, а другая составляющая \bar{M}^* осталась неизменной. Заметим, исходная величина главного момента равна:

$$M_A = \sqrt{M^{*2} + M_1^2} = \sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}$$

При выборе точек приведения по линии AO от исходной точки до конечной $d \rightarrow 0$ и главный момент $M_A \rightarrow M^* = \min$, **минимальному главному моменту**. Геометрическое место точек центров приведения, для которых главный момент системы является минимальным называется **центральной осью**.

Кинематическое состояние системы не меняется при переносе главного вектора и главного минимального момента вдоль центральной оси системы. Следовательно, полученный результат справедлив для любой точки O лежащей на этой оси. Можно показать, что при выборе точек приведения на одном и том же расстоянии от центральной оси (геометрической поверхности) главные моменты системы равны по модулю и образуют одинаковый угол α с образующей цилиндра.

$$M^* = M_A \cos \alpha = M_A \cos(\bar{M}_A, \bar{R}^*)$$

Главный минимальный момент может быть вычислен как **проекция главного момента** в любой точке приведения на центральную ось:

$$\cos \alpha = \frac{M^*}{M_A} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}}$$

Лекция 4 (продолжение – 4.6)

- **Инварианты системы сил** – величины, не зависящие от выбора центра приведения:
- **Первый (векторный) инвариант** – главный вектор системы сил \mathbf{R}^* :

$$\bar{\mathbf{R}}^* = \sum \bar{\mathbf{F}}_i$$

Главный момент не является инвариантом, поскольку он зависит от выбора центра приведения. Однако существует величина, связанная с главным вектором, не зависящая от выбора центра приведения:

1. Запишем зависимость для главного момента системы от выбора точки приведения:
2. Умножим левую и правую части этого выражения скалярно на главный вектор и раскроем скобки:

$$\bar{\mathbf{M}}_B = \bar{\mathbf{M}}_A - \bar{\mathbf{d}} \times \bar{\mathbf{R}}^*$$

$$\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_B = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot (\bar{\mathbf{M}}_A - \bar{\mathbf{d}} \times \bar{\mathbf{R}}^*) = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A - \bar{\mathbf{R}}^* \cdot (\bar{\mathbf{d}} \times \bar{\mathbf{R}}^*)$$

3. Второе слагаемое в правой части обращается в ноль, т.к. главный вектор \mathbf{R}^* перпендикулярен вектору векторного произведения в скобках. Отсюда получаем тождество:

$$\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_B = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A$$

Таким образом, **скалярное произведение главного вектора \mathbf{R}^* на вектор главного момента \mathbf{M}_A** есть **второй (скалярный) инвариант**:

$$\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A = in\ var$$

Отсюда, **главный минимальный момент M^*** также является инвариантной величиной:

$$M^* = \frac{\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A}{R^*} = \frac{in\ var}{in\ var} = in\ var$$

Теоремы Вариньона о моментах равнодействующей для пространственной системы сил:

Если система сил имеет равнодействующую, то

- момент равнодействующей относительно любого центра равен **геометрической** сумме моментов сил системы относительно того же центра.
- момент равнодействующей относительно любой оси равен **алгебраической** сумме моментов сил системы относительно той же оси.

Доказательство: Пусть система сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$ приводится к равнодействующей, приложенной в точке O . Такая система не находится в равновесии ($\mathbf{R} \neq 0$).

Уравновесим эту систему силой \mathbf{R}' , равной равнодействующей \mathbf{R} , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Система исходных сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$ и уравнивающей силы \mathbf{R}' находится в равновесии и должна удовлетворять условиям равновесия, например:

$$\sum \bar{\mathbf{M}}_{iA} + \bar{\mathbf{M}}_A(\bar{\mathbf{R}}') = 0$$

Поскольку сила \mathbf{R}' , равна равнодействующей \mathbf{R} и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $\mathbf{M}_A(\mathbf{R}') = -\mathbf{M}_A(\mathbf{R})$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum \bar{\mathbf{M}}_{iA} - \bar{\mathbf{M}}_A(\bar{\mathbf{R}}) = 0 \quad \text{или}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_A(\bar{\mathbf{R}}) = \sum \bar{\mathbf{M}}_{iA}$$

Спроектируем это векторное равенство на любую ось, например, x :

$$M_x(\bar{\mathbf{R}}) = \sum M_{ix}$$

