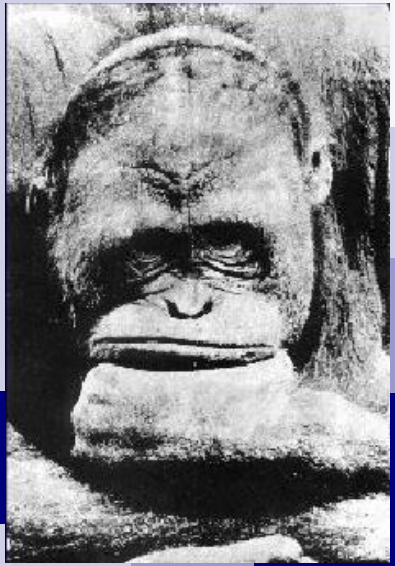
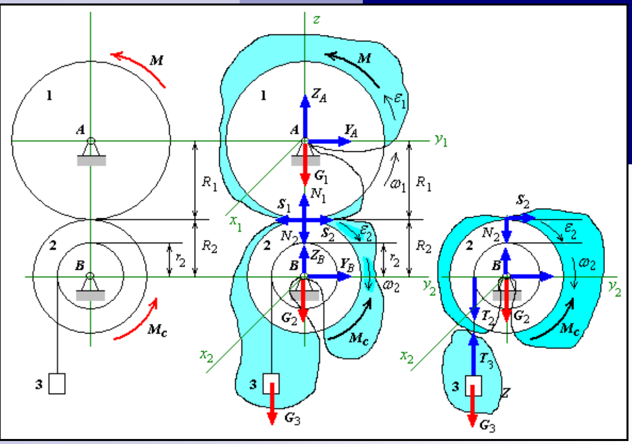


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт

Курс лекций по теоретической механике

Кинематика

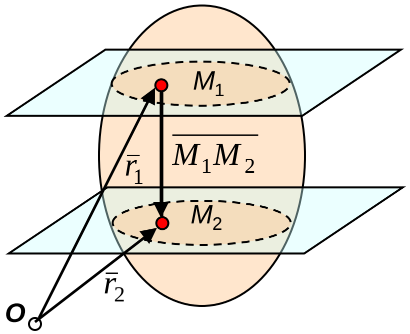


Лекция 8.

Плоскопараллельное движение.

Лекция 8

- **Плоскопараллельное движение твердого тела – движение при котором каждая точка тела движется в в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости**. Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.



- **Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела – плоскопаралллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей**.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям:

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки О и свяжем их между собой вектором ***M_1M_2***:

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

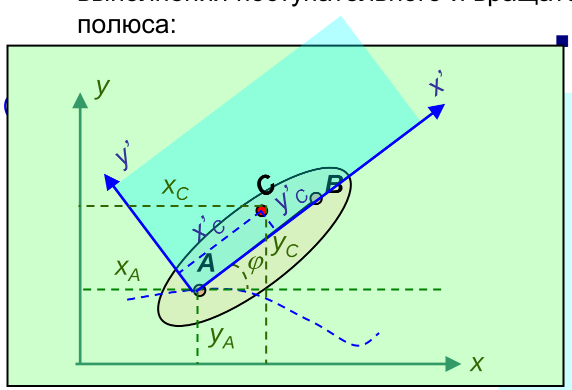
При плоском движении тела вектор ***M_1M_2*** не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\boxed{\frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \overline{const}); \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \;\; \text{и} \quad \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}; \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1.}$$

Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

Следствие: Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то **плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями**.

- **Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения –** Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса:



- Таким образом, **плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения**.

Уравнение движения плоской фигуры: Выбирая в качестве полюса любую точку, например, *A*, поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки. Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса:

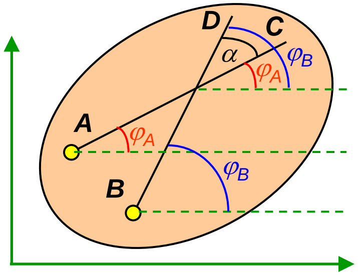
$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}}$$

Уравнения движения любой точки плоской фигуры, положение которой задается координатами локальной системы отсчета, связанной с фигурой:

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= x_A(t) + x'_C \cos\varphi(t) - y'_C \sin\varphi(t); \\ y_C &= y_A(t) + x'_C \sin\varphi(t) + y'_C \cos\varphi(t). \end{aligned}}$$

Лекция 8 (продолжение 8.2)

- **Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса –** Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках:



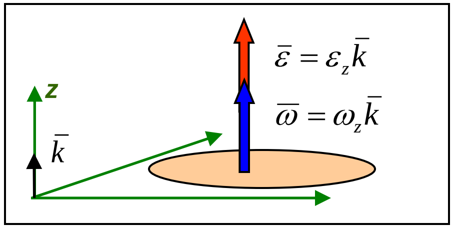
Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением: $\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha.$

Продифференцируем это соотношение: $\dfrac{d\varphi_B(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi_A(t)}{dt}, \quad (\alpha = const).$

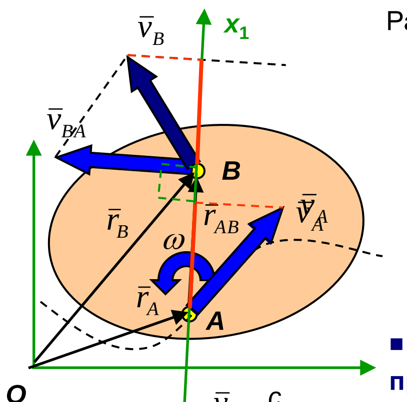
Отсюда следует, что **угловые скорости** двух отрезков **равны**: $\boxed{\omega_{CA} = \omega_{DB}.}$

После повторного дифференцирования следует, что **угловые ускорения** двух отрезков также **равны**: $\dfrac{d\omega_{CA}}{dt} = \dfrac{d\omega_{DB}}{dt}.$ $\boxed{\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}.}$

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры:



- **Теорема о сложении скоростей – Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.**



Радиусы-векторы точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{r}_{AB}(t).$$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}(t)}{dt}.$$

$$\boxed{\bar{v}_B(t)} \quad \boxed{\bar{v}_A(t)} \quad \boxed{\bar{v}_{BA}(t)}$$

Второе слагаемое есть вращательная скорость точки *B* вокруг полюса *A*:

$$\boxed{\bar{v}_{BA}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}_{AB}(t); \qquad |\bar{r}_{AB}| = const.}$$

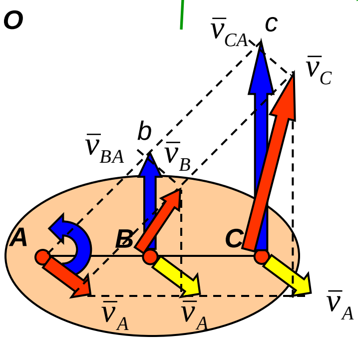
Таким образом, скорость точки *B* равна геометрической сумме скорости полюса *A* и вращательной скорости точки *B* вокруг полюса :

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.}$$

- **Следствие 1 – Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны .**

Спроецируем векторное соотношение на ось x_1: $\boxed{(x_1): \quad v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp x_1).}$

- **Следствие 2 – Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов вращательных скоростей точек *B* и *A* лежат на одной прямой и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

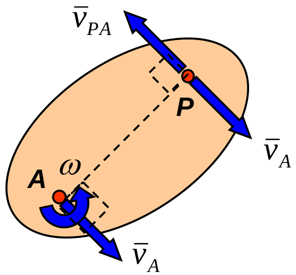
$$v_{BA} = \omega AB, \qquad v_{CA} = \omega AC, \qquad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}.$$

Концы векторов скоростей полюса *A* лежат, изображенных в точках *B* и *C* также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов скоростей точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками:

Лекция 8 (продолжение 8.3)

- **Мгновенный центр скоростей (МЦС) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю.**



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки *P* согласно теоремы о сложении скоростей:

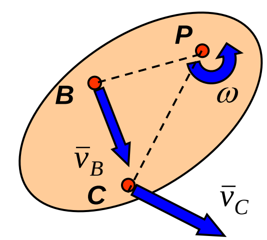
$\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}.}$ Зададим значение скорости этой точки *P* равной нулю: $\boxed{\bar{v}_P = 0.}$

Тогда получаем: $\bar{v}_{PA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = -\bar{v}_A.$ Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки А, параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

Это позволяет найти положение МЦС (точки *P)*, а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки *A*, отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии: $\boxed{AP = \dfrac{v_A}{\omega}.}$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МСЦ . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PB} = \bar{v}_{BP}; \quad (\bar{v}_P = 0); \quad v_B = \omega \cdot BP;$$
$$\bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PC} = \bar{v}_{CP}; \quad (\bar{v}_P = 0); \quad v_C = \omega \cdot CP;$$



Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС**.