ГЛАВА 16

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

16.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

16.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Комплексным числом z называется пара действительных чисел (x, y), записанных в определенном порядке: $z = (x, y)$. Одним из обозначений служит запись вида

$$z = x + iy, \tag{16.1}$$

называемая алгебраической формой записи комплексного числа z. В записи (16.1) x называется действительной, y – мнимой частями комплексного числа z (для этого употребляется также запись $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$); i называется “мнимой единицей”.

Для геометрического изображения комплексного числа z вводят на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy; ось Ox называется действительной, Oy – мнимой осями, плоскость Oxy – комплексной плоскостью (z). Комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку $M(x, y)$ плоскости (z), либо вектор $\overline{OM}$ – и точка и вектор служат геометрическим изображением комплексного числа $z = z(x, y)$, $z = \overline{OM}$ (рис. 16.1). Модуль вектора $\overline{OM}$ $\left(r = \left|\overline{OM}\right|\right)$ называется модулем комплексного числа z; он определяется по формуле

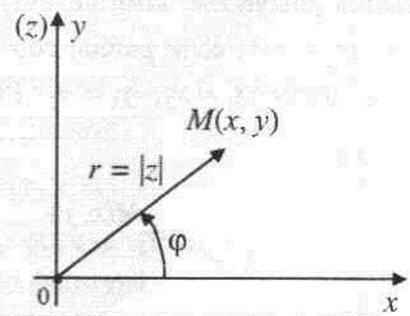

Рис. 16.1

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{16.2}$$

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overline{OM}$ называется аргументом комплексного числа z: $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Значение φ, заключенное в промежутке $-\pi < \varphi \le \pi$, называется главным значением аргумента (обозначение –arg z):

$$-\pi < \arg z \le \pi \qquad (16.3)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \qquad (n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots). \qquad (16.3')$$

Главное значение аргумента комплексного числа z можно определить по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y < 0. \end{cases} \qquad (16.4)$$

Определение. Запись вида

$$z = |z| \, (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \qquad (16.5)$$

называется тригонометрической формой записи комплексного числа z.

Замечание. Комплексное число z записывается также в показательной форме

$$z = |z| \, e^{i(\arg z + 2\pi n)} . \qquad (16.5')$$

Для сравнения комплексных чисел z_1 и z_2 вводится лишь операция равенства: комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны $(z_1 = z_2)$, если равны соответственно их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Равенство чисел, записанных в тригонометрической форме, формулируется следующим образом: $z_1 = z_2$, если модули их равны: $|z_1| = |z_2|$, а аргументы связаны соотношением

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \qquad (16.6)$$

(следует обратить внимание на то, что здесь сравниваются не элементы множества, а сами бесконечные множества).

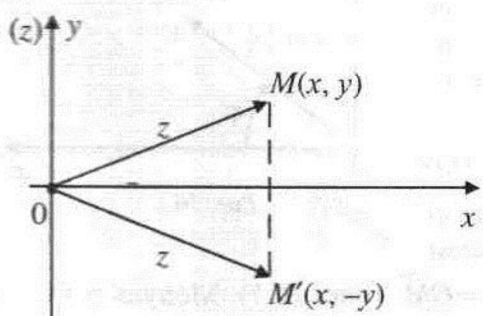

Рис. 16.2

Определение. Два комплексных числа $x + iy$ и $x - iy$ называются комплексно-сопряженными числами. Для этого употребляют обозначение z и $\overline{z}$ (рис. 16.2).

16.1.2. ДЕЙСТВИЯ СЛОЖЕНИЯ, ВЫЧИТАНИЯ, УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

Действия сложения и вычитания над комплексными числами определяются геометрически, т.е как соответствующие действия над векторами (рис. 16.3) и, следовательно, выполняются по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \tag{16.7}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{16.8}$$

– чтобы сложить два комплексных числа (например), нужно сложить отдельно действительные и мнимые части, что и будет действ-

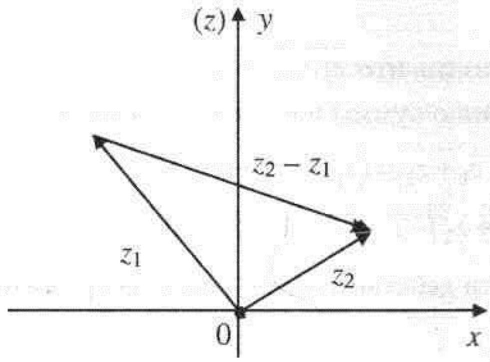

Рис. 16.3

вительной и мнимой частями суммы чисел. Из формул (16.7) и (16.8) находим

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}; \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{16.9}$$

Под произведением комплексных чисел z_1 и z_2 (обозначается $z_1 z_2$) понимается комплексное число z, равное

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{16.10}$$

Деление комплексных чисел z_1 и z_2 определяется через действие умножения и может быть проведено по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{16.11}$$

Практические поступают иначе. Так как по формуле (16.10) $z\overline{z}_1 = |z|^2$, то деление удобно выполнять по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2} \tag{16.11'}$$

Так введенные операции сложения и умножения комплексных чисел подчиняются известным пяти законам арифметики:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (ассоциативность сложения);

3) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (коммутативность умножения);

4) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (ассоциативность умножения);

5) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Формула (16.10) "раскрывает смысл" "мнимой единицы" $i : i^2 = -1$. Таким образом, умножение комплексных чисел производится по обычным правилам алгебры с заменой i^2 на –1.

Приведем решение "типовых примеров" на введенные выше понятия.

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

∇ По определению суммы и ее свойств имеем:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$\overline{(z_1 + z_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 . \ \#$$

Пример 2. Найти действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + +(5 - 3i)y = 13 + i$.

∇ Запишем левую часть уравнения в алгебраической форме: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. По определению равенства комплексных чисел получим систему уравнений $4x + 5y = 13;\ 2x - 3y = 1$, решением которой является пара чисел $x = 2,\ y = 1$. #

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (3+4i)z_1 + 2i \cdot z_2 = 3 - i; \\ (6-4i)z_1 + 3z_2 = 10 - 7i. \end{cases}$$

∇ Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3+4i & 2i \\ 6-4i & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta_{z_1} = \begin{vmatrix} 3-i & 2i \\ 10-7i & 3 \end{vmatrix} = -5 - 23i; \quad \Delta_{z_2} = \begin{vmatrix} 3+4i & 3-i \\ 6-4i & 10-7i \end{vmatrix} = 26 + 37i$$

и, следовательно, $z_1 = \dfrac{\Delta_{z_1}}{\Delta} = -5 - 23i; \quad z_2 = \dfrac{\Delta z_2}{\Delta} = 26 + 37i$. #

Пример 4. Для числа $z = -\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8}$ а) построить геометрическое изображение; б) найти модуль и главное значение аргумента; в) записать число в тригонометрической форме; г) записать число в показательной форме.

∇ Число представлено, очевидно, в алгебраической форме (не имеет вида (16.5): $x = -\sin\dfrac{\pi}{8}$; $y = -\cos\dfrac{\pi}{8}$. На рис. 16.4 число представлено геометрически. Найдем модуль комплексного числа z. По формуле (16.2)

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1.$$

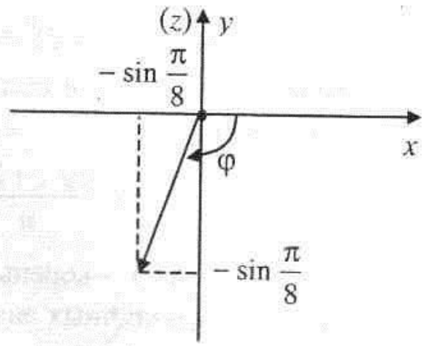

Рис. 16. 4

Так как точка z расположена в третьем квадранте ($x<0$, $y<0$), то главное значение аргумента его следует вычислить по третьей строчке формулы (16.4):

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}.$$

Таким образом, $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{5\pi}{8} + 2\pi n$ $(n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots)$. Запишем z в тригонометрической форме: $z = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)$ и показательной форме: $z = e^{-\frac{5\pi}{8}i}$. #

16.1.3. ВОЗВЕДЕНИЕ В ЦЕЛУЮ СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{16.12}$$

– при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Деление выполняется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{16.13}$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{16.14}$$

Следствием формулы (16.14) является формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,. \tag{16.15}$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа z производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \tag{16.16}$$

$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ – корень n-й степени из комплексного числа z имеет (только) n различных значений. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Для геометрического определения корней (16.16) следует найти по данной формуле одно значение корня, поставить соответствующую точку на окружности, разбить затем окружность на n равных частей – таким образом могут быть построены остальные вершины n-угольника.

Приведем решение примеров.

Пример 1. Вычислить $(-1+i\sqrt{3})^{59}$; решение записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

∇ Представим число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. По формуле (16.4) находим:

$$(-1+i\sqrt{3})^{59} =$$

$$= 2^{59}\left(\cos\frac{59\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{59\cdot 2\pi}{3}\right) = 2^{59}\left[\cos\frac{(60-1)\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{(60-1)2\pi}{3}\right] =$$

$$= 2^{59}\left[\cos\left(40\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(40\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2^{59}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Так как здесь $-\pi < -\frac{2\pi}{3} < \pi$, то последняя запись представляет исходное число в тригонометрической форме. В алгебраической форме записи число имеет вид: $(-1+i\sqrt{3})^{59} = 2^{59}(1-i\sqrt{3})$ и в показательной: $(-1+i\sqrt{3})^{59} = 2^{59}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$. #

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$.

∇ Представим число $-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме: $-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. По формуле (16.16) находим:

$$z_{k+1} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi/6 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{5\pi/6 + 2\pi k}{4}\right), \qquad k = \overline{0,3}.$$

Полагая последовательно k равным 0, 1, 2 и 3, находим корни:

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right);\quad z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right);$$

$$z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24}+i\sin\frac{29\pi}{24}\right);\quad z_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24}+i\sin\frac{41\pi}{24}\right).$$

Для построения этих чисел на комплексной плоскости (z) проведем окружность радиуса $R=\left|z_{k+1}\right|=\sqrt[4]{2}$. На окружности отметим точку $z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$. Разбивая далее окружность на четыре равные части, изобразим остальные точки (рис. 16.5; заметим, что $\frac{5\pi}{24}$ рад. соответствует $37°30'$). #

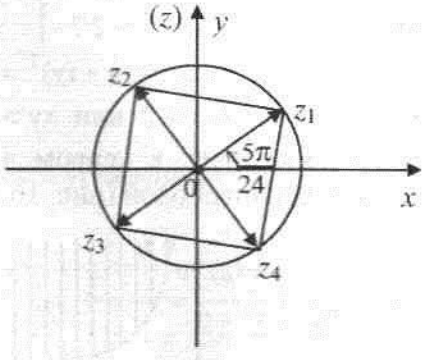

Рис. 16.5

Пример 3. Решить уравнение $z^2-(2+i)z+7i-1=0$.

∇ Имеем $z=\frac{2+i}{2}+\sqrt{\frac{4-1+4i+4-28i}{4}}=\frac{2+i}{2}+\frac{\sqrt{7-24i}}{2}$.

Значение $\sqrt{7-24i}$ определим алгебраическим путем. Положим: $\sqrt{7-24i}=x+iy$ (x и y –действительные числа). Возводя в квадрат и используя определение равенства комплексных чисел, находим систему уравнений: $7-24i=x^2-y^2+2xyi-x^2-y^2=7$; $xy=-12$. Исключая y, приходим к уравнению $x^2-\frac{144}{x^2}-7=0$, или $x^4-7x^2-144=0$.

Определим корни уравнения: $x^2=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49+576}{4}}=\frac{7+\sqrt{625}}{2}=16$.

Знак минус перед корнем следует отбросить, так как x – действительное число. Далее находим: $x_1=4$, $x_2=-4$ и $y_1=-3$, $y_2=3$. Запишем найденные решения: $\sqrt{7-4i}=4-3i$ и $\sqrt{7-24i}=-4+3i$ и, окончательно, $z_1=\frac{2+i}{2}+\frac{4-3i}{2}=\frac{6-2i}{3}=3-i$; $z_2=\frac{2+i}{2}+\frac{-4+3i}{2}=$ $=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$. #

З а м е ч а н и е. Решение квадратных уравнений (иногда) можно найти с помощью теоремы Виета. Пусть требуется решить уравнение $z^2-(1+i)z+i=0$. Если взять $z_1=1$ и $z_2=i$, то получим, что $z_1z_2=i$, $z_1+z_2=1+i$. На основании теоремы утверждаем, что 1 и i – корни исходного уравнения.

16.1.4. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. ЗАДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

При решении геометрических задач используется геометрический смысл модуля комплексного числа, его аргумента, геометрический смысл введенных алгебраических операций и пр. Приведем конкретные примеры.

Пример 1. Какое множество точек на плоскости (z) определяется условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$?

∇ Имеем $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ и, значит, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$ или $xy > 1$. Последнее неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой (рис. 16.6). #

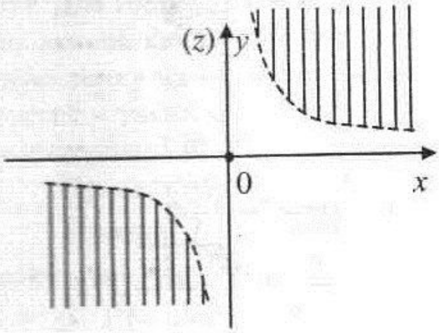

Рис. 16.6

Пример 2. Какое множество точек на плоскости (z) определяется условием $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z+1-i) \le \dfrac{3\pi}{4}$?

∇ Комплексное число $z+1-i = z-(-1+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$ и концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\pi/2$ до $3\pi/4$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\pi/2$ и $3\pi/4$ (рис. 16.7). #

Пример 3. Какая кривая задается уравнением $|z+c|+|z-c|=2a$, где c и a – действительные положительные числа, причем $a > c$.

∇ Модуль $|z+c|$ есть расстояние между точками z и $-c$; $|z-c|$ – расстояние между точками z и c. По условию сумма расстояний от точки z до двух данных точек $-c$ и c есть величина постоянная. Значит, точка z лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ (рис. 16.8). #

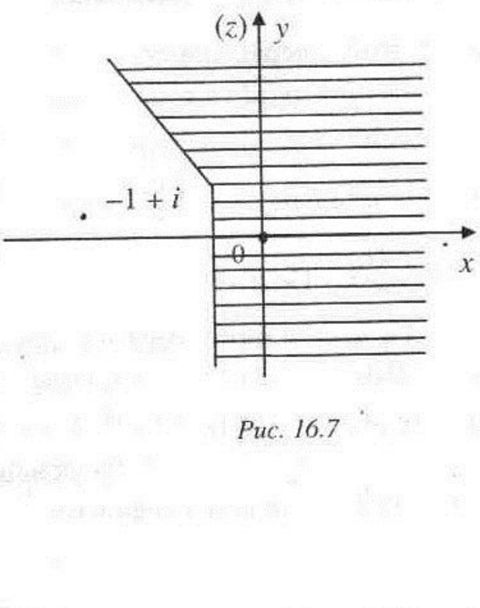

Рис. 16.7

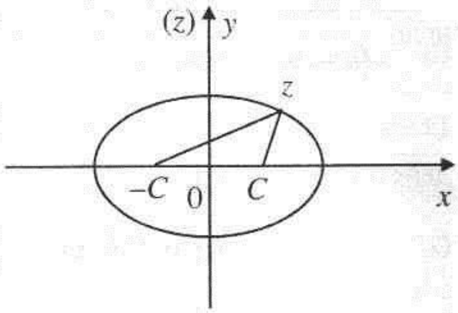

Рис. 16.8

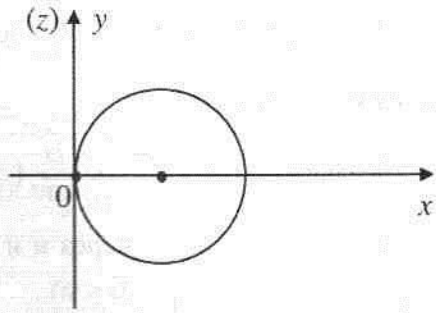

Рис.16. 9

Пример 4. Какая кривая определяется уравнением $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$?

∇ Имеем [см. (16.9)] $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{\overline{z}}+\dfrac{1}{z}}{2}=\dfrac{z+\overline{z}}{2z\cdot\overline{z}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

По условию $\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$ или $x^2+y^2-4x=0$ – это окружность $(x-2)^2+y^2=4$ (рис. 16.9). #

Пример 5. Написать в комплексной форме уравнение прямой $Ax+By+C=0$.

∇ Подставляя x и y по формуле (16.9) в уравнение прямой, получаем $A(\overline{z}+z)+Bi(\overline{z}-z)+2C=0$, или $(A+iB)\overline{z}+(A-iB)z+2C=0$. Обозначив $A+iB=a$, $2C=b$, получим уравнение: $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$ – уравнение прямой в комплексной форме. #

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$; в) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; г) $\overline{\overline{z}_1+\overline{z}_2}=z_1+z_2$.

2. Найти:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{2}{1-3i}$; в) $\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $(\sqrt{3}-i)^5$; д) $(1+i\sqrt{3})^3$.

3. Найти действительные решения уравнений:

а) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$;

б) $(x-iy)(a-ib)=i^5$, где a, b – заданные действительные числа, $|a|\neq|b|$; в) $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$.