13. Решить уравнения:

а) $z^3+3z^2+3z+3=0$; б) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$;

в) $2\left|z\right|-3z=1-2i$; г) $z^8-2z^4+2=0$; д) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2=2i$.

14. Найти множества точек на плоскости (z), определяемые заданными условиями:

а) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\le 1$; б) $\left|z^2-1\right|\ge a^2$ $(a>0)$; в) $1\le\left|z+2+i\right|\le 2$;

г) $\left|z\right|>1-\operatorname{Re} z$; д) $0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$; е) $\left|z\right|>2+\operatorname{Im} z$;

ж) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)<-\dfrac{1}{2}$; з) $\dfrac{1}{4}<\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)+\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)<\dfrac{1}{2}$.

15. Какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $\operatorname{Re}\overline{z}^2=1$; б) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=1$; в) $\operatorname{Im}\,(\overline{z^2-\overline{z}})=2-\operatorname{Im} z$;

г) $2z\overline{z}+(2+i)z+(2-i)\overline{z}=2$; д) $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|$;

е) $\operatorname{Re}(1+z)=\left|z\right|$; ж) $z=\overline{z}$.

16. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий:

а) координатных осей Ox и Oy; б) прямой $y=x$; в) прямой $y=kx+b$, k,b – действительные числа; г) гиперболы $x^2-y^2=a^2$; д) окружности $x^2+y^2+2x=0$?

16.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

16.2.1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение 1. Областью в комплексной плоскости (z) называется открытое связное множество.

Определение 2. Открытым называется множество, состоящее лишь из внутренних точек.

Определение 3. Точка z называется внутренней точкой множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 4. Под ε-окрестностью точки a понимается открытый круг радиуса ε с центром в точке a:

$$\left|z-a\right|<\varepsilon. \qquad (16.17)$$

Определение 5. Множество называется связным, если любые две его точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение 6. Область называется ограниченной, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R с центром в начале координат. Иначе она называется неограниченной.

Определение 7. Границей Г области D называется совокупность точек, не принадлежащих области D, любая окрестность которых содержит точки, принадлежащие области D.

Определение 8. Область D вместе с границей Г называется замкнутой областью; обозначается это $\overline{D} = D + \Gamma$.

Определение 9. Ограниченная область называется односвязной областью, если ее граница состоит из одной связной линии; многосвязной областью, если ее граница состоит из нескольких связных линий. Связной называется линия, из любой точки которой можно перейти по ней в любую другую ее точку.

Определение 10. Говорят, что в области D определена функция $w = f(z)$, если $\forall z \in D$ поставлено в соответствие (по некоторому закону соответствия) одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w. Пусть $w = u + v$. Тогда

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z). \tag{16.18}$$

Функция комплексного переменного (ФКП) (16.18) не имеет графика: она соответствует заданию двух действительных функций переменных x и y:

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y). \tag{16.18'}$$

Геометрический смысл ее состоит в осуществлении отображения точек комплексной плоскости (z) на соответствующие точки комплексной плоскости (w) (формула (16.18′).

Пусть в плоскости (z) кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u, v) = 0$ этой кривой в плоскости (w) при отображении с помощью функции $w = f(z) = u + iv$, нужно исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y); \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \tag{16.19}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$ или $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, то параметрические уравнения ее образа при отображении $w = f(z) = u + iv$ будут

$$\begin{aligned} u &= u\,[x(t), \quad y(t)] = U(t); \\ v &= v\,[x(t), \quad y(t)] = V(t). \end{aligned} \tag{16.19'}$$

Пример 1. Даны множества точек: а) $|z+i|<3$; б) $1<|z|<2$; в) $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$; г) $|2z|<|1+z^2|$. Какие из этих множеств являются областями?

∇ В соответствии с определениями 1–9 заключаем, что множество $|z+i|<3$ – открытый круг с центром в точке $-i$ радиуса 3, множество $1<|z|<2$ – открытое круговое кольцо с центром в начале координат, множество $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ – открытый угол (рис. 16.7) – являются областями. Построив множество г): $\left[x^2+(y-1)^2-2\right]\left[x^2+(y+1)^2-2\right]>0$ (рис. 16.10), убеждаемся, что оно не является областью (не выполняется для него условие связности). #

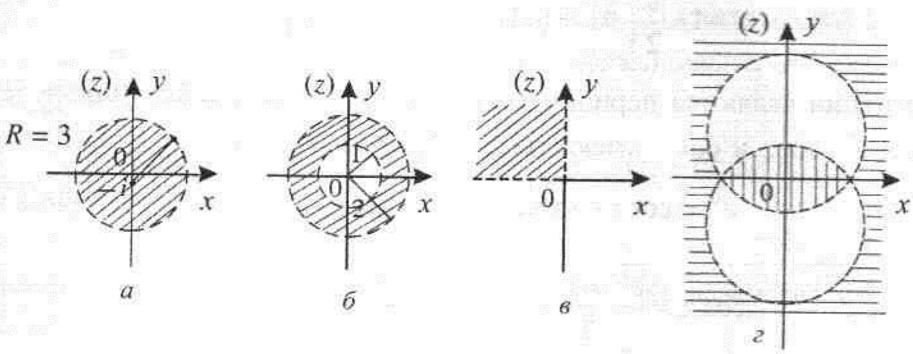

Рис. 16.10

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $w=z^3-i\overline{z}$.

∇ Имеем $w=u+iv=(x+iy)^3-i(x-iy)=(x^3-3xy^2-y)+$ $+i(3x^2y-y^3-x)$; отсюда $u=x^3-3xy^2-y$; $v=3x^2y-x-y^3$. #

Пример 3. В какую кривую отображается единичная окружность $|z|=1$ с помощью функции $w=z^2$?

∇ Имеем $u=x^2-y^2$; $v=2xy$. Исключая x и y из уравнений $u=x^2-y^2$; $v=2xy$; $x^2+y^2=1$, получаем $u^2+v^2=1$. Таким образом, окружность $|z|=1$ преобразуется при преобразовании $w=z^2$ в окружность $u^2+v^2=1$ в плоскости (w). Так как $\operatorname{Arg} w=2\operatorname{Arg} z+2k\pi$, то, когда точка z описывает полную окружность $|z|=1$, ее образ (точка w) описывает две полные окружности $|w|=1$. #

16.2.2. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФКП

Основные элементарные ФКП могут быть определены следующим образом.

1. Показательная функция e^z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2\,!} + \ldots + \frac{z^n}{n\,!} + \ldots \qquad |z| < \infty. \tag{16.20}$$

Функция обладает следующими свойствами: 1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$; 2) $e^{z+2\pi ki} = e^z$; 3) $e^z = e^x(\cos\, y + i\,\sin\, y)$.

2. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$:

$$\sin\, z = z - \frac{z^3}{3\,!} + \ldots + (-1)^n\, \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \ldots, |z| < \infty; \tag{16.21}$$

$$\cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2\,!} + \ldots + (-1)^n\, \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} + \ldots., \ |z| < \infty. \tag{16.22}$$

Функции являются периодическими с периодом $T = 2\pi$. Для функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,\ \ e^{-iz} = \cos z - i\sin z; \tag{16.23}$$

$$\cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \ \sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{16.24}$$

3. Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z};\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{16.25}$$

Для тригонометрических функций сохраняются свойства “действительной” тригонометрии.

4. Гиперболические функции $\operatorname{sh} z, \ldots, \operatorname{cth} z$ определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{16.26}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{16.27}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\ \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{16.28}$$

Между тригонометрическими и гиперболическими функциями устанавливается связь:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z;$$
$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z. \tag{16.29}$$

Справедливы также соотношения

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{16.30}$$

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z; \qquad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z. \tag{16.31}$$

5. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z \quad (z \neq 0)$ – комплексно-значный логарифм –определяется как функция, обратная показательной $z = e^w$. При этом

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \tag{16.32}$$

есть запись логарифмической функции в алгебраической форме. Вводится понятие главного значения (однозначной ветви) $\operatorname{Ln} z$: $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi$, так как из формулы (16.32) следует, что $\operatorname{Ln} z$ является бесконечнозначной функцией. Справедливы соотношения (свойства функции $\operatorname{Ln} z$):

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \;\; \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k i.$$

Заметим, что эти равенства следует понимать как равенства между множествами.

6. Обратные тригонометрические функции определяются как решения соответствующих уравнений (например, функция $w = \operatorname{Arc}\sin z$ есть обратная по отношению к $\sin z$, т.е. это решение уравнения $z = \sin w$ и пр.) Все эти функции бесконечнозначны и выражаются через логарифмические функции:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \tag{16.33}$$

$$\operatorname{Arc}\cos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{16.34}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \tag{16.35}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}. \tag{16.36}$$

7. Обратные гиперболические функции вычисляются по формулам:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}); \tag{16.37}$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \tag{16.38}$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}; \tag{16.39}$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{z-1}. \tag{16.40}$$

8. Общая степенная функция $w = z^a$ определяется по формуле

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} \quad (a,\, z \text{ – комплексные числа}). \tag{16.41}$$

Пусть $a = \alpha + i\beta$. Степенная функция бесконечнозначна, если $\beta \neq 0$ или α – число иррациональное.

9. Общая показательная функция $w = a^z$. По определению

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \tag{16.42}$$

Из представления $a^z = e^{z \ln a} e^{i2\pi kz}$ видно, что эта функция представляет собой совокупность отдельных функций, отличающихся друг от друга множителем $e^{i2\pi kz}$, $k \in Z$.

16.2.3. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Определение. Число $A \neq \infty$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$ (обозначается $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon. \tag{16.43}$$

Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если $\forall\, E > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$

$$|f(z)| > E. \tag{16.43'}$$

З а м е ч а н и е. Существование предела по любому фиксированному пути $(z \to z_0)$ для функции еще не гарантирует существование предела при $z \to z_0$.

Пример. Показать, что для функции $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$ $\exists \lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

∇ При $r \to 0$ по любому лучу $re^{i\varphi}$ имеем $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi$, т.е. эти пределы различны для различных направлений – они заполняют сплошь отрезок $[-1;\, 1]$ и, следовательно, $\exists \lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

Определение 2. Функция называется непрерывной в точке z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 3. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области.

Задачи для самостоятельного решения

17. Изобразить множества; выяснить, какие из них являются областями, какие нет, какие из них – ограниченные области, какие не ограничены: а) $\operatorname{Re} z = \alpha$; б) $\alpha < \operatorname{Re} z \leq \beta$; в) $\operatorname{Im} z > \delta$; г) $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$, $\gamma < \operatorname{Im} z < \delta$; д) $r \leq |z - z_0| < R$.

18. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий (t – действительный параметр): а) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; б) $x = 2t$, $y = t - 1$; в) $y = 2x$; г) $2x + 3y = 1$; д) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

19. Какие линии заданы комплексным уравнением (t – действительный параметр): а) $z = (1+i)t$; б) $z = t^2 + it + 4$; в) $z = \cos t + i\sin t$; г) $z = t + \dfrac{i}{t}$; д) $z = t(it^2 + 1)$?

20. Для указанных функций найти действительную и мнимую части: а) $w = \overline{z} - iz^2$; б) $w = z^2 + i$; в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{1}{z}$; д) $w = \dfrac{iz+1}{1+z}$; е) $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

21. Найти образы данных точек при указанных отображениях: а) $z_0 = -i$, $w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i$, $w = (z-i)^2$; в) $z_0 = 1$, $w = \dfrac{1}{z-i}$; г) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

22. На какие линии плоскости (w) отображает функция $w = z^2$ следующие линии плоскости (z): а) прямую $x = 2$; б) прямую $y = 1$; в) гиперболу $xy = 1$; г) окружность $x^2 + y^2 = 4$?

23. Найти уравнение линий плоскости (w), на которые функция $w = \dfrac{1}{z}$ отображает следующие линии плоскости (z): а) $|z| = \dfrac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$; г) $\arg z^2 = -\dfrac{\pi}{2}$; д) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; е) $|z| = z$.