16.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

16.3.1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФКП. АНАЛИТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \quad (z+\Delta z \in D). \tag{16.44}$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z. Для нее употребляются обозначения $f'(z)$, $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Теорема. Для того чтобы функция $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы функции $u=u(x,\ y)$, $v=v(x,\ y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись условия Коши–Римана (говорят также Даламбера–Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.45}$$

Определение 2. Функция $w=f(z)$ называется аналитической (регулярной) в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Определение 3. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.46}$$

Заметим, что формулы дифференцирования ФКП аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Пример 1. Показать, что функция $f(z)=e^{2z}$ аналитична, и найти $f'(z)$.

∇ Имеем $e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, т.е. $u(x,\ y)=e^{2x}\cos 2y$, $v(x,\ y)=e^{2x}\sin 2y$. Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y$ и, следовательно, условия (16.45) выполняются во всей плоскости; по первой из формул (16.46) имеем $(e^{2z})'=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\sin 2y=2e^{2z}$. #

Пример 2. Является ли функция $w=z\cdot\overline{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

∇ Имеем $z\overline{z} = x^2 + y^2$, так что $u = x^2 + y^2$, $v \equiv 0$. Условия Коши–Римана имеют вид: $2x = 0$, $2y = 0$ и удовлетворяются только в точке (0, 0). Следовательно, функция $w = z\overline{z}$ дифференцируема только в точке (0, 0) и нигде не аналитична. По определению (16.44) запишем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta z \Delta\overline{z}}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta\overline{z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0$. Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю. #

16.3.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. СОПРЯЖЕННО-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $f(z)$

Определение 1. Функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и в этой области лапласиан $\Delta u = 0$ $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$.

Определение 2. Две гармонические функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, удовлетворяющие условию (16.45), называются сопряженно-гармоническими функциями.

Теорема. Для того, чтобы функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ были соответственно действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = u + iv$, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряженно-гармоническими функциями. Пользуясь условиями Коши–Римана, аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить, если известна ее действительная $u = u(x, y)$ или мнимая часть $v(x, y)$.

Пример 1. При каких условиях трехчлен $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической функцией?

∇ Находим: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$. Лапласиан $\Delta u = 0$ (т.е. $2a + 2c = 0$), если $a + c = 0$ (при $\forall b$). #

Пример 2. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$ при дополнительном условии $f(0) = 0$.

∇ Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из условий Коши– Римана (16.45) находим производные $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -4y$ (1); $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$ (2). Из пер-

вого из этих уравнений находим: $u=-\int 4ydx=-4xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем u по y и подставляем в (2): $-4x+\varphi'(y)=-4x-1$, откуда $\varphi'(y)=-1$ и $\varphi(y)=-y+c$. Следовательно, $u=-4xy-y+c$ и окончательно получим: $w=u+iv=$
$=-4xy-y+c+i(2x^2-2y^2+x)=2i(x^2-y^2+2ixy)+i(x+iy)+c=2iz^2+iz+c$. Определим c: $f(0)=2i\cdot 0+i\cdot 0+c$ и $c=0$; таким образом, $w=2iz^2+iz$. #

16.3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то $k=|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости (z) на плоскость (w). Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости (z), проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$.

Пример. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

∇ Имеем $w'(z)=2z$, так что $w'(z_0)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$. Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $w'(z_0)$ к тригонометрической, получим: $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $k=4$, угол поворота $\varphi=\pi/4$. #

Задачи для самостоятельного решения

52. Пользуясь условиями Коши–Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими, хотя бы в одной точке, какие – нет: а) $w=z^2\bar{z}$; б) $w=ze^z$; в) $w=|z|\bar{z}$; г) $w=e^{z^2}$; д) $w=|z|\operatorname{Re}\bar{z}$; е) $w=\sin 3z-i$; ж) $w=\bar{z}\operatorname{Re}z$; з) $w=\bar{z}\operatorname{Im}z$; и) $w=|z|\operatorname{Im}z$; к) $w=\operatorname{ch}z$.

53. Показать, что в области $\operatorname{Re}z>0$ $w=\ln z$ – аналитическая функция.