60. Можно ли найти аналитическую функцию, у которой действительная часть равна: а) $\sqrt{x^2+y^2}$; б) x^3+y^3; в) $(e^x+e^{-x})\sin y$?

61. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений $w=f(z)$ в указанных точках: а) $w=z^2$, $z_0=\sqrt{2}(1+i)$; б) $w=z^2$, $z_0=i$; в) $w=z^3$, $z_0=1+i$; г) $w=z^3$, $z_0=1$; д) $w=\sin z$, $z_0=0$; е) $w=ie^{2z}$, $z_0=2\pi i$.

62. Выяснить, какая часть плоскости (w) растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях: а) $w=\frac{1}{z}$; б) $w=e^{z-1}$; в) $w=\ln(z+1)$; г) $w=z^2+2z$.

63. Найти множество всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях коэффициент растяжения $k=1$: а) $w=(z-1)^2$; б) $w=z^2-iz$; в) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$; г) $w=-z^3$.

64. Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях угол поворота $\varphi=0$: а) $w=-\frac{i}{z}$; б) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$; в) $w=z^2+iz$; г) $w=z^2-2z$.

16.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФКП

16.4.1. ИНТЕГРАЛ ПО КРИВОЙ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D; L – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D.

По определению

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\sup|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\,. \tag{16.47}$$

Если $f(z)=u(x,\,y)+iv(x,\,y)$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy \tag{16.48}$$

– вычисление интеграла (16.47) сводится к вычислению (обычных) криволинейных интегралов второго рода. Заметим, что интеграл (16.47) зависит, вообще говоря, от пути интегрирования L. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (или в комплексной форме $z(t)=x(t)+iy(t)$), начальная и конечная точки кривой L соответствуют значениям параметра $t=\alpha$, $t=\beta$.

Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt. \qquad (16.49)$$

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D, z_0, $z_1 \in D$, $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для $f(z)$ $(\Phi'(z) = f(z))$, то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \qquad (16.\ 50)$$

Справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = [f(z)g(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz, \qquad (16.51)$$

где $f(z)$, $g(z)$ – аналитические функции в односвязной области D, z_0, z_1 – произвольные точки этой области.

Замена переменных в интегралах от ФКП аналогична случаю ФДП. Пусть аналитическая функция $z = g(w)$ отображает взаимно однозначно контур L в плоскости (z) на контур L' в плоскости (w). Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_{L'} f[g(w)]g'(w)dw. \qquad (16.52)$$

Если функция является многозначной, то для вычисления интеграла указывается, какая именно однозначная ветвь ее берется при этом. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования L замкнут, то начальной точкой z_0 пути интегрирования считается та, в которой задано значение подынтегральной функции.

Пример 1. Вычислить $I = \int_L (1+i-2\overline{z})dz$ по кривой $L: y = x^2$, соединяющей точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$.

∇ Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$, $0 \le x \le 1$. По формуле (16.48)

$$I = \int_0^1 \Big[1 - 2x - (1+2x^2)2x\Big]\,dx + i\int_0^1 \Big[1 + 2x^2 + (1-2x)2x\Big]\,dx = -2 + i\,\frac{4}{3}.\ \#$$

Пример 2. Вычислить $I = \int_L (z + \overline{z})dz$, где L – дуга окружности $|z| = 1$, $\pi/2 \le \arg z \le 3\pi/2$.

∇ Положим $z(t)=e^{it}$, $\pi/2\le t\le 3\pi/2$. Тогда $z'(t)=ie^{it}dt$, и по формуле (16.49) находим:

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(e^{it}+e^{-it})ie^{it}dt=i\left(\frac{1}{2i}e^{2it}+t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}=\pi i\ .\ \#$$

Пример 3. Вычислить $I=\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz$.

∇ Так как подынтегральная функция $f(z)=3z^2+2z$ аналитична всюду, то по (16.50) найдем: $I=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=7+19i$. #

Пример 4. Вычислить $I=\int\limits_{0}^{i}z\cos zdz$.

∇ Функции $f(z)=z$ и $g(z)=\sin z$ аналитичны всюду. По формуле (16.51) получим:

$$I=\int\limits_0^i z(\sin z)'dz=(z\cdot\sin z)\Big|_0^i-\int\limits_0^i\sin zdz=i\sin i+\cos z\Big|_0^i=$$

$$=\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1-1=e^{-1}-1\ .\ \#$$

Пример 5. Вычислить $I=\int\limits_L\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, $L=\{z\colon |z|=1,\ -\pi/2\le\arg z\le\pi/2\}$, $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∇ Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной: $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$; $\varphi=\arg z$. Условию $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет та однозначная ветвь этой функции, для которой $k=1$. Действительно, при $k=1$ (и так как $\arg 1=0$) $\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{0+2\pi}{3}}=\ =\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Полагая теперь $z(\varphi)=e^{i\varphi}(-\pi/2\le\varphi\le\ \le\pi/2)$ на кривой L, находим $\sqrt[3]{z}=e^{i\frac{\varphi+2\pi}{3}}$, $z'(\varphi)=ie^{i\varphi}$ и, следовательно, $I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ie^{i\varphi}}{e^{i(\varphi+2\pi)/3}}=$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}id\varphi=\frac{3}{2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)=\frac{9}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}.\ \#$$

16.4.2. ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ КОШИ

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \qquad (16.53')$$

Если, помимо того, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D} = \Gamma + D$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 \qquad (16.53)$$

– теорема Коши для односвязной области.

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то (контур $\Gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ обходится в положительном направлении)

$$\oint_{\Gamma + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m} f(z)dz = 0 \qquad (16.54)$$

– теорема Коши для многосвязной области. Дадим другую формулировку этой теоремы:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{m=1}^{k} \oint_{\gamma_m} f(z)dz \qquad (16.55)$$

– интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (все контуры проходятся в одном и том же направлении).

Если $f(z)$ аналитична в области D, $z \in D$ и $\gamma \subset D$ – контур, охватывающий точку z, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad (\zeta \in \gamma). \qquad (16.56)$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \qquad (16.57)$$

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz \cdot dz}{z^2 + 4z + 3}$.

∇ Внутри окружности $|z| = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_0 = -1$. Для применения формулы (16.56) перепишем интеграл в виде $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz \cdot dz}{(z+1)(z+3)} = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}}{z-(-1)} dz$. Здесь $z_0 = -1$ и $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$ аналитична в круге $|z| \le 2$. Тогда $I = [2\pi i \cdot f(-1)] = = 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1$. #

Пример 2. Вычислить $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$: по а) контуру Г: $|z-2| = 0,5$; б) Г: $|z-2| = 3$.

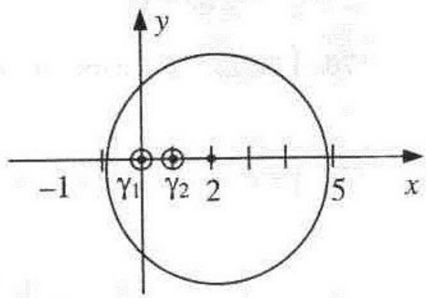

Рис. 16.11

∇ а) в круге $|z-2| \le 0,5$ функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ аналитична; следовательно, по теореме (16.53) $I = 0$; б) так как внутри контура ин-тегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, то для того чтобы стало возможным применить формулы (16.56) и (16.57), рассмотрим многосвязную область D (рис. 16.11), ограниченную окружностью $\Gamma = \{z : |z-2| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{z : |z| = \rho\}$ и $\gamma_2 = \{z : |z-1| = \rho\}$ $(0 < \rho < 1/2)$. Тогда в D функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и по теореме (16.55) можно записать: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz$. Для вычисления интегралов справа применим формулы (16.56) и (16.57):

$$\oint\limits_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1} dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z^3}\right|_{z=1} = 2\pi e i; \quad \oint\limits_{\gamma_1} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3} dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z-1} \right) \right]_{z=0} = \pi i \left. \frac{e^z (z^2 - 4z + 5)}{(z-1)^3} \right|_{z=0} = -5\pi i$$ и, таким образом, $I = \pi i (2e - 5)$. #