Применяя теоремы и интегральные формулы Коши, вычислить интегралы:

83. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\,dz$. **84.** $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}\,dz$. **85.** $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$.

86. $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$. **87.** $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$.

88. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^3}$. **89.** $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}\,dz}{(z-1)^2(z-3)}$. **90.** $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{2\pi i}}{z^3-4z^2}\,dz$.

91. $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz$. **92.** $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz$.

16.5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

16.5.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,. \qquad (16.58)$$

Теорема. Для сходимости ряда (16.58) необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_n \qquad (16.58')$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (16.58'')$$

Определение. Ряд (16.58) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|\,. \qquad (16.59)$$

Ряды (16.58)′, (16.58)″ и (16.59) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

∇ а) имеем $e^{in}=\cos n+i\sin n$. Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. Так как каждый из рядов сходится абсолютно, то и данный ряд сходится абсолютно; б) приведем еще решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего составим ряд $\left(\left|e^{in}\right|=\left|\cos n+i\sin n\right|=1\right)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – этот ряд сходится абсолютно. #

Пример 2. Исследовать поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

∇ Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд. #

16.5.2. СТЕПЕННЫЕ, СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ И ДВУСТОРОННИЕ РЯДЫ

Определение 1. Ряд вида

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\ , \qquad (16.60)$$

где $c_0, c_1, c_2,\ldots$ – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется степенным рядом в комплексной области.

Определение 2. Ряд вида

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots c_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (16.61)$$

называется степенным рядом общего вида.

Определение 3. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n} \qquad (16.62)$$

называется рядом, сводящимся к степенному общего вида.

Определение 4. Двусторонним называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n\ . \qquad (16.63)$$

Область сходимости степенного ряда (16.58) есть круг с центром в начале координат: $|z| < R$, где R – радиус сходимости. В некоторых случаях он может быть определен по формулам

$$\text{а) } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad (c_n \neq 0\ \forall n);$$
$$\text{б) } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{16.64}$$

Для рядов (16.61) областью сходимости служит круг $|z-a| < R$. Область сходимости ряда (16.62) ищется после проведения замены: $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$. Ряд вида (16.63) сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots, \tag{16.65}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \tag{16.66}$$

Пусть ряд (16.65) сходится в области $|z-a| > r$, т.е. вне круга с центром в точке $z = a$ и радиуса r, а ряд (16.66) в круге $|z-a| < R$. Тогда, если: 1) $r > R$, то ряд (16.63) расходится всюду; 2) $r < R$, то ряд (16.63) сходится в кольце $r < |z-a| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$.

∇ Находим модуль коэффициента $c_n = (1+i)^n$: $|c_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}$. Применяя формулу б) из (16.64), находим $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. #

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$.

∇ Имеем $c_{-n} = \sin in = i\,\mathrm{sh}\, n$, $c_{-n-1} = i\,\mathrm{sh}(n+1)$ и

$r = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|i\,\mathrm{sh}(n+1)|}{|i\,\mathrm{sh}\, n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{sh}(n+1)}{\mathrm{sh}\, n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} = e$. Следовательно, ряд сходится в области $\left|z+i\right|>e$, т.е. вне круга с центром в точке $a=-i$ радиуса $r=e$. #

Пример 3. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+$ $+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$.

∇ Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ имеем $c_{-n}=e^{in}$, $c_{-n-1}=e^{i(n+1)}$.

Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1$. Первый ряд сходится в области $\left|z+1\right|>1$.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ имеем $c_n=e^{-in-1/2}$, $c_{n+1}=e^{-i(n+1)-1/2}$.

Его радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-in-1/2}}{e^{-i(n+1)-1/2}}\right|=1$, т.е. второй ряд сходится в области $\left|z+1\right|<1$. Данный ряд расходится всюду. #

Пример 4. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+$ $+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$.

∇ Для первого из рядов имеем $c_{-n}=(3+4i)^n$, $c_{-n-1}=(3+4i)^{n+1}$. Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}=\left|\frac{(3+4i)^{n+1}}{(3+4i)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|3+4i\right|=5$. Первый ряд сходится в области $\left|z+2i\right|>5$. Для второго ряда имеем $c_n=6^{-n}$, $c_{n+1}=6^{-n-1}$. Радиус его сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{6^{-n}}{6^{-n-1}}\right|=6$ – он сходится в области $\left|z+2i\right|<6$. Таким образом, данный ряд сходится в кольце $(r=5<R=6)$: $5<\left|z+2i\right|<6$. #