16.5.3. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

1°. Ряд Тейлора. Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в точке $z=a$ разлагается (т.е. является суммой) в окрестности этой точки в степенной ряд – ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (16.67)$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (n=0,1,2...), \qquad (16.68)$$

Γ – окружность с центром в точке $z=a$, целиком лежащая в области аналитичности $f(z)$. Областью сходимости ряда является круг с центром в точке разложения радиуса R, равного расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки – точки, в которой $f(z)$ теряет аналитичность.

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<R$, однозначно представима в нем своим рядом Тейлора (16.67), коэффициенты которого определяются по формулам (16.68).

Из этой теоремы и теоремы о возможности дифференцирования степенного ряда в круге сходимости любое число раз следует, что разложение функции в степенной ряд единственно. Это означает, что по любому методу разложения функции в степенной ряд мы получаем одно и то же разложение – ряд Тейлора. При $a=0$ ряд (16.67) называется рядом Маклорена. с.122

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

Теорем. единств.

Кр. Коши

Т. Лиувилля

$$1)\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!},\ z\in(Z);\quad 2)\ \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)\,!},\ z\in(Z);$$

$$3)\ \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!},\ z\in(Z);$$

$$4)\ \ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1; \qquad (16.69)$$

$$5)\ \operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1;$$

6) $(1+z)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n\,!}\,z^n$, $|z|<1$, $\alpha\in R$;

7) $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2+...+(-1)^n z^n+...\quad |z|<1$;

8) $\dfrac{1}{(1+z)^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\dfrac{1}{1+z}\right)$.

Для непосредственного разложения функции в степенной ряд (ряд Тейлора) необходимо найти закон получения производной n-го порядка (подобные примеры опустим).

Пример 1. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

∇ Рассмотрим сначала следующее преобразование данной логарифмической функции $\ln(2-5z)=\ln\left[17\left(1-\dfrac{5}{17}(z+3)\right)\right]=$ $=\ln 17+\ln\left[1-\dfrac{5}{17}(z+3)\right]$. Воспользуемся разложением 4) из (16.69) для $\ln(1+u)$, полагая $u=-\dfrac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение 4) имеет место при $|u|<1$, то наше разложение будет иметь место при $\dfrac{5}{17}|z+3|<1$. Таким образом, для $|z+3|<\dfrac{17}{5}$: $\ln(2-5z)=\ln 17+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\dfrac{5}{17}(z+3)\right)^n\dfrac{1}{n}=\ln 17-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5}{17}\right)^n\dfrac{(z+3)^n}{n}$. #

Часто при разложении функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби – разложением ее на простейшие.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$.

∇ Разложим $f(z)$ на простейшие дроби: $f(z)=\dfrac{1}{2z+5}+\dfrac{2}{(z-3)^2}$.

По формуле суммы геометрической прогрессии 7) из (16.69) получаем:

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{1+\dfrac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\ |z|<\frac{5}{2}$$

и $$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-z/3}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \ |z|<3.$$

Замечая, что $[2(z-3)]'=-2(z-3)^{-2}$, и применяя теорему о возможном почленном дифференцировании степенного ряда в круге сходимости, получаем $\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}}, \ |z|<3.$

Складывая ряды для $\frac{1}{2z+5}$ и $\frac{2}{(z-3)^2}$, имеем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, \quad |z|<\frac{5}{2}. \#$$

2°. Ряды Лорана.

Определение. Рядом Лорана называется ряд (16.63)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n; \qquad (16.63)$$

при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ – правильной частью. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=$ $=r<R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$, то областью сходимости ряда (16.63) является кольцо $0\le r<|z-a|<R$.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0\le r<|z-a|<R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана (16.63), коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \ (r<\rho<R; \ n=0, \pm1, \pm2, \ldots). \qquad (16.70)$$

Заметим, что из этой теоремы "кольца разложимости" определяются через расстояния от центра разложения до двух "соседних" особых точек $f(z)$. Вычисление контурных интегралов (16.70), как правило, затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются различные искусственные приемы.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<2$ функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$.

∇ Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]. \quad (*)$$

Первые два слагаемых в правой части (*) имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности $(z-1)$. Последние два слагаемых запишем в виде:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}},\quad \frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}.$$

Применив формулы 7), а затем 8) (из (16.69)), найдем

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right], \quad (**)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1-(z-1)+3\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-4\left(\frac{z-1}{2}\right)^3\ldots\right]. \quad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в (*), после несложных преобразований получаем разложение $f(z)$ в кольце $0<|z-1|<2$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^n}(z-1)^n\right]. \#$$

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$ в окрестности $a=0$.

∇ Для любого комплексного ζ имеем

$\cos\zeta=1-\dfrac{\zeta^2}{2!}+\dfrac{\zeta^4}{4!}-\dfrac{\zeta^6}{6!}+\ldots$ Полагая $\zeta=\dfrac{1}{z}$, получаем: $z^2\cos\dfrac{1}{z}=$

$$=z^2\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!\,z^2}-\frac{1}{6!\,z^4}+\ldots.$$

Это разложение справедливо для любой точки $z\neq0$. В данном случае "кольцо" представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0$: $0<|z|<+\infty$ $(r=0,\ R=+\infty)$. #

Пример 3. Рассмотреть различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$.

∇ Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-2$ и $z_2=1$. Следовательно, имеется три "кольца" с центром в точке $a=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической: а) круг $|z|<1$; б) кольцо $1<|z|<2$; в) $2<|z|<+\infty$ – внешность круга $|z|\le 2$. Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих "колец". Представим предварительно функцию в виде суммы простейших дробей: $f(z)=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$ (*).

а) Разложение в круге $|z|<1$. Преобразуем (*) следующим образом: $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}-\dfrac{1}{1-z}$ (**). Используя формулу 7) из (16.69), получаем: $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$, $|z|<1$ (***); далее

$$\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots,\ |z|<2. \qquad (****)$$

Подставляя эти разложения в (**), получаем: $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{4}+$ $+\dfrac{z^2}{8}-\ldots-(1+z+z^2+\ldots)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}z-\dfrac{7}{8}z^2-\dfrac{15}{6}z^3+\ldots$ – это разложение есть ряд Маклорена функции $f(z)$.

б) Разложение в кольце $1<|z|<2$. Ряд (****) для функции $\dfrac{1}{1+z/2}$ остается сходящимся в этом кольце, так как $|z|<2$. Ряд (***) для функции $\dfrac{1}{1-z}$ расходится для $|z|>1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}. \qquad (*****)$$

Применяя формулу 7), получаем:

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\ . \qquad (******)$$

Этот ряд сходится, если $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$. Подставляя (****) и (******) в (*****), найдем $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

в) Разложение для $|z| > 2$. Ряд (****) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z| > 2$ расходится, а ряд (******) для функции $\frac{1}{1+z/2}$ сходится, так как, если $|z| > 2$, то и подавно $|z| > 1$. Функцию $f(z)$ представим в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right).$$

Используя формулу 7), получаем $f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \ldots + \right.$ $\left.+\, 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots$. Заметим, что этот пример показывает, что для одной и той же функции ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец.

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в окрестности ее особых точек.

∇ Особые точки функции: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

а) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_1 = 1$, т.е. в кольце $0 < |z-1| < 1$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$. Правую часть преобразуем так: $\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}$. Применяя разложение 7), в котором z заменим на $-(z-1)$, получим $\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \ldots\right]$ или $\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$.

б) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2 = 2$, т.е. в кольце $0<|z-2|<1$. Имеем $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{1+(z-2)}=$

$$=\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\ldots=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\ .\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость ряды:

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$. **94.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$. **95.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos in}$.

96. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$. **97.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$. **98.** $\displaystyle\sum\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

99. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{in}z^n$. **100.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$. **101.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

102. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n}\cdot z^n$. **103.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\operatorname{sh}^n(1+in)}$. **104.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)z^n$.

Определить область сходимости следующих рядов:

105. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$. **106.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^n(iz)^{-n}$. **107.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

108. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$. **109.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}$. **110.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$.

111. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$.

112. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n\,!}\quad(0\,!=1)$.

113. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$. **114.** $\displaystyle -\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.