Тема: Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Задание 1. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 4$, вычислить: 1) $\boldsymbol{a}^2$; 2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$; 2) $(\boldsymbol{3a}-\boldsymbol{2b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b})$; 3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

Задание 2. Даны единичные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Вычислить $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$.

Задание 3. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}, |\boldsymbol{b}| = 1$, вычислить угол $\boldsymbol{\alpha}$ между векторами $p = a + b$ и $q = a - b$.

Задание 4. Даны векторы $a = \{4, -2, -4\}, b = \{6, -3, 2\}$. Вычислить:
1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$; 3) $\sqrt{\boldsymbol{b}^2}$; 4) $(\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{3b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b})$; 5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$; 6) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

Задание 5. Определить, при каком значении α векторы $a = \alpha i - 3j + +2k$ и $b = i + 2j - \alpha k$ взаимно перпендикулярны.

Задание 6. Вектор $\boldsymbol{x}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a} = \{6, -8, -7{,}5)$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|x| = 50$, найти его координаты.

Задание 7. Даны вершины четырехугольника $A(2, -3, 1)$, $B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1)$ и $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задание 8. Даны точки $A(-1, 3, -7), B(2, -1, 5), C(0, 1, -5)$. Вычислить:
1) $(2\overline{AB} - \overline{CB}, 2\overline{BC} + \overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$;

Задание 9. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^2$ 2) $[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})]^2$ 3) $[(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}), (3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$.

Задание 10. Пусть $\boldsymbol{a} = \{3, -1, -2\}$ и $\boldsymbol{b} = \{1, 2, -1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$; 2) $[2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$.

Задание 11. Даны вершины треугольника $A(1, -1{,}2)$, $B(5, -6{,}2)$ и $C(1{,}3, -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задание 12. Даны точки $A(2, -1{,}2), B(1{,}2, -1)$ и $C(3{,}2{,}1)$. Найти координаты векторных произведений 1) $[\overline{AB}, \overline{BC}]$; 2) $[(\overline{BC} - 2\overline{CA}), \overline{CB}]$.

Задание 13. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1), D(4, 1, 3).

Задание 14. Вектор $\boldsymbol{x}$, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a} = \{4, -2, -3)$ и $\boldsymbol{b} = \{0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\boldsymbol{x}| = 26$, найти его координаты.