16.6. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

16.6.1. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Точка z_0 называется нулем аналитической функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, если $f(z_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. В случае $n = 1$ точка z_0 называется простым нулем.

Теорема. Для того чтобы точка z_0 была нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки имело место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядки.

∇ Из уравнения $1 + \cos z = 0$ находим точки $z_n = (2n+1)\pi$ $(n \in Z)$ – нули данной функции. Имеем: $f'[(2n+1)\pi] = -\sin(2n+1)\pi = 0$, $f''[(2n+1)\pi] = -\cos(2n+1)\pi = 1 \neq 0$, т.е. точки $z_n = (2n+1)\pi$ $(n \in Z)$ – нули второго порядка данной функции. #

Пример 2. Найти нули функции $f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z$ и определить их порядки.

∇ Полагая $(z^2+1)^3 \operatorname{sh} z = 0$, получаем, что $z^2 + 1 = 0$ или $\operatorname{sh} z = 0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$: $z = \pm i$, $z = n\pi i$, $n \in Z$. Пусть $z = -i$; тогда $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z+i)^3 \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = (z-i)^3 \operatorname{sh} z$ является аналитической в точке $z = -i$, причем $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \sin 1 \neq 0$. Это означает, что точка $z = -i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z = i$ является нулем третьего порядка. Исследуем нули $z = n\pi i$, $n \in Z$. Производная $f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z$ в точках $z = n\pi i$ отлична от нуля. Следовательно, $z = n\pi i$ – простые нули функции $f(z)$. #

16.6.2. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Определение 1. Точка z_0 называется особой точкой аналитической функции $f(z)$, если в ней аналитичность ее нарушается.

Определение 2. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z - z_0| < \delta$ этой точки с исключенной точкой z_0, в которой $f(z)$ аналитична, кроме самой точки z_0.

Существует три типа изолированных особых точек. Приведем их определения.

Определение 3. Точка z_0 называется устранимой особой точкой $f(z)$, если разложение ее в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит главной части.

Определение 4. Точка z_0 называется полюсом кратности n функции, если в разложении ее в ряд Лорана в окрестности точки z_0 главная часть содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является c_{-n} $(c_{-n} \neq 0)$.

Определение 5. Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечное число членов.

Приведем критерии типа изолированных особых точек.

1) для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ $(|A| < +\infty)$.

2) для того чтобы точка z_0 была полюсом кратности n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^n\right] = B$ $(|B| < \infty)$.

3) для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\exists} \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Полезна следующая теорема. Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, нужно, чтобы она была нулем n-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$ (связь между нулями и полюсами).

Пример 1. Для функции $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ особой точкой является $z = 0$. Имеем $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$ – $z = 0$ есть устранимая особая точка.

Пример 2. Для функции $f(z) = \dfrac{1}{z^5}$ $z = 0$ является особой точкой. Так как $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z^5} = \infty$ – это полюс. Так как для функции $g(z) = z^5$ точка $z = 0$ является нулем пятого порядка, то $z = 0$ – полюс пятого порядка функции $\dfrac{1}{z^5}$.

Пример 3. Для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $z=0$ является особой точкой. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\ldots$ в главной части содержит бесконечное число членов; это существенно особая точка.

Пример 4. Найти все особые точки функции $f(z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

∇ Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, откуда $\left(\frac{1}{z}=\mathrm{Ln}(-1)\right)$ $z_n=\frac{1}{(2n+i)\pi i}$, причем эти точки являются нулями первого порядка. Следовательно, в точках $z_n=\frac{1}{(2n+1)\pi i}$, $n\in Z$ функция $f(z)$ имеет простые полюса. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$: это означает, что любая окрестность точки $z=0$ содержит бесконечное число особых точек $f(z)$. #

Задачи для самостоятельного решения

У нижеследующих функций найти нули и определить их порядки:

132. z^4+4z^2. **133.** $\frac{\sin z}{z}$. **134.** $\frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$. **135.** $1+\operatorname{ch} z$.

136. $(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$. **137.** $\cos z+\operatorname{ch} iz$.

Найти порядок нуля $z_0=0$ для следующих функций:

138. $\frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2}$. **139.** $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$. **140.** $\frac{(1-\cos 2z)^2}{z-\operatorname{sh} z}$.

141. $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$.

Определить характер особой точки $z_0=0$ для следующих функций:

142. $\frac{1}{z-\sin z}$. **143.** $\frac{1}{\cos z-1-\frac{z^2}{2}}$. **144.** $\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$.