Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

145. $\frac{1}{1-\sin z}$. **146.** $\frac{1-\cos z}{z^2}$. **147.** $e^{\frac{1}{z+2}}$.

148. $\cos\frac{1}{z+2i}$. **149.** $\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$. **150.** $\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z^2}$.

151. $z\sin\frac{1}{z}$. **152.** $\frac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$. **153.** $\operatorname{th} z$.

16.7. ВЫЧЕТЫ. ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

16.7.1. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ относительно точки a (обозначается $\operatorname{res} f(a)$ или $\operatorname*{res}_a f(z)$ называется число, равное

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz\,; \tag{16.71}$$

L – простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя (только) одну особую точку a. В качестве L удобно брать окружность $|z-a|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения (16.71) вытекает, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $z-a$:

$$\operatorname{res} f(a)=c_{-1}. \tag{16.72}$$

Из представления (16.72) следует, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе определяется по формуле

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]. \tag{16.73}$$

Если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем a – простой нуль функции $\psi(z)$, а $\varphi(a)\neq 0$, то

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{16.74}$$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе a порядка m определяется по формуле

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(m-1)\,!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-a)^m \right]. \qquad (16.75)$$

Если точка a – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения $\operatorname{res} f(a)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$ в ее особых точках.

∇ Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=0$ и $z=\dfrac{\pi}{4}$.

В точке $z=0$ имеем: $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z^2}{z^2} \lim \dfrac{1}{z - \pi/4} = -\dfrac{4}{\pi}$, т.е. точка $z=0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому $\operatorname{res} f(0) = 0$. В точке $z = \dfrac{\pi}{4}$ $\lim\limits_{z \to \pi/4} f(z) = \infty$, т.е. точка $z = \dfrac{\pi}{4}$ – полюс (первого порядка) функции $f(z)$. По формуле (16.73) имеем $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{z \to \pi/4} \left[f(z)\left(z - \dfrac{\pi}{4}\right) \right] = \lim\limits_{z \to \pi/4} \dfrac{\sin z^2}{z^2} = \dfrac{16}{\pi^2} \sin \dfrac{\pi^2}{16}$. #

Пример 2. Определить вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ относительно точки $z = i$.

∇ Точка $z = i$ является полюсом третьего порядка функции, так как $\dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \dfrac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$. В соответствии с (16.75) получим:

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{2\,!} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[f(z)(z-i)^3 \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} (z+i)^{-3} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \left[12(z+i)^{-5} \right] = \frac{-3i}{16}. \ \#$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{3}{z-2}}$ в ее особых точках.

∇ Особой для данной функции является точка $z = 2$. Это – существенно особая точка (из свойств функции e^z следует, что $\nexists \lim\limits_{z \to \infty} e^z$). Для определения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения функции $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $z - 2$. Так как

$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2 + \ldots,\quad 0 < |z-2| < +\infty$, то $c_{-1} = 3$ и, следовательно, $\operatorname{res} f(2) = 3$. #

16.7.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k). \qquad (16.76)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$, где $L: |z+2| = 2$.

∇ Особыми точками подынтегральной функции являются $z = -2$ – полюс второго порядка, $z = \pm i$ – полюса первого порядка. Внутри окружности $|z+2| = 2$ (рис. 16.12) лежит лишь точка $z = -2$. Поэтому по формуле (16.76) $\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} =$

$$= 2\pi i \operatorname{res} f(-2) = 2\pi i \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{8\pi i}{25}. \#$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$I = \int_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz,\ L: |z - i| = \frac{3}{2}$.

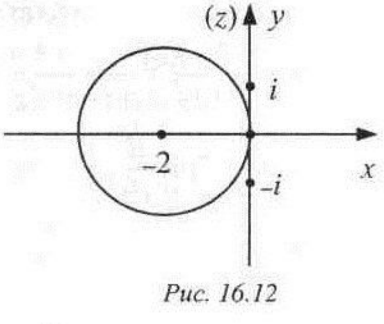

Рис. 16.12

∇ В области $D: |z-i| < \frac{3}{2}$ функция $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z = i$ – полюс первого порядка и $z = 0$ – существенно особую точку.

По формуле (16.74) имеем $\operatorname{res} f(i) = \left.\frac{e^{1/z^2}}{2z}\right|_{z=i} = (2ie)^{-1}$. Для нахождения вычета в точке $z = 0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Из представления функции в виде $f(z) = e^{1/z^2}\,\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^{-1}$ следует, что в ее лорановском разложении содержатся только четные степени z и $\frac{1}{z}$, так что $c_{-1}=0$ и $\operatorname{res} f(0)=0$. По теореме Коши о вычетах (16.76) $I=\frac{\pi}{e}$. #

16.7.3. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ "ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ" ИНТЕГРАЛОВ

1. Если рациональная функция $R(x)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}R(a_k), \tag{16.77}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – нули $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z>0$).

2. Пусть $R(\sin x, \cos x)=F(z)$, если положить $e^{ix}=z$. Тогда

$$\int_{0}^{2\pi}R(\cos x, \sin x)dx=2\pi i\cdot\sigma, \tag{16.78}$$

где σ есть сумма вычетов функции $F(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z|=1$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$.

∇ Подынтегральная функция – четная, поэтому

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}.$$

Для функции $R(x)=\frac{x^2}{(x^2+9)^2}$: $P(z)=z^2$, $Q(z)=(z^2+9)^2$ – многочлены второй и четвертой степени ($m=2$, $k=4$) и $k-m=2$. Нули функции $Q(z)$: $z=3i$ и $z=-3i$ лежат вне вещественной оси, причем в верхней полуплоскости лежит лишь нуль $z=3i$. Условия теоремы (16.77) выполнены для данной функции, и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=2\pi i\,\operatorname*{res}_{3i}\frac{z^2}{(z^2+9)^2}=2\pi i\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 3i}\frac{6iz}{(z+3i)^3}=\frac{\pi}{6}\quad\text{и}\quad I=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.\ \#$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$ $(a>b>0)$.

∇ Применяя подстановку $e^{ix}=z$, получаем после преобразований $\left(\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\ \ dx=\frac{dz}{iz}\right)$ $I=\frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{(bz^2+2az+b)^2}=$

$=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{res}F(z_k)$. Внутри единичного круга $|z|<1$ при условии $(a>b>0)$ находится только один полюс (двукратный) $z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ относительно этого полюса $\operatorname{res}F(z_1)=\lim\limits_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]=\frac{a}{4}(a^2-b^2)^{-3/2}$

и $I=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$. #

Задачи для самостоятельного решения

В нижеследующих задачах требуется найти вычеты указанных функций относительно ее конечных изолированных особых точек:

154. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$. **155.** $f(z)=\frac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$. **156.** $f(z)=\frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$.

157. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$. **158.** $f(z)=\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$. **159.** $f(z)=\operatorname{ctg}^2 z$.

160. $f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$. **161.** $f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$. **162.** $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$.