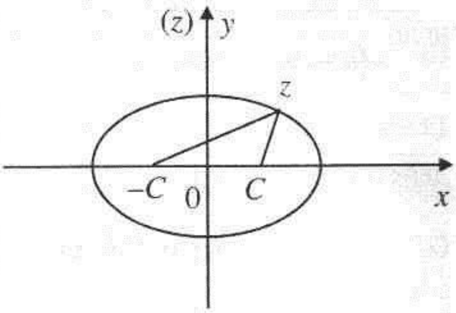

Рис. 16.8

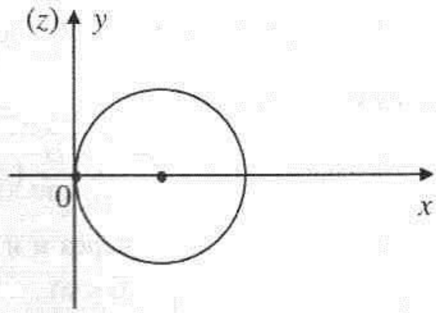

Рис.16. 9

Пример 4. Какая кривая определяется уравнением $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$?

∇ Имеем [см. (16.9)] $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z+\overline{z}}{2z\cdot\overline{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

По условию $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$ или $x^2+y^2-4x=0$ – это окружность $(x-2)^2+y^2=4$ (рис. 16.9). #

Пример 5. Написать в комплексной форме уравнение прямой $Ax+By+C=0$.

∇ Подставляя x и y по формуле (16.9) в уравнение прямой, получаем $A(\overline{z}+z)+Bi(\overline{z}-z)+2C=0$, или $(A+iB)\overline{z}+(A-iB)z+2C=0$. Обозначив $A+iB=a$, $2C=b$, получим уравнение: $\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$ – уравнение прямой в комплексной форме. #

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$; в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; г) $\overline{\overline{z}_1+\overline{z}_2}=z_1+z_2$.

2. Найти:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{2}{1-3i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $(\sqrt{3}-i)^5$; д) $(1+i\sqrt{3})^3$.

3. Найти действительные решения уравнений:

а) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$;

б) $(x-iy)(a-ib)=i^5$, где a, b – заданные действительные числа, $|a|\neq|b|$; в) $\frac{1}{z-i}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$.

4. Представить комплексное число $\dfrac{1}{(a+ib)^2}+\dfrac{1}{(a-ib)^2}$ в алгебраической форме.

5. Вычислить $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}$ (x – действительное число).

6. Выразить x и y через u и v ($x,\dots,v$ – действительные числа), если $\dfrac{1}{x+iy}+\dfrac{1}{u+iv}=1$.

7. Найти все числа, удовлетворяющие условию $\overline{z}=z^2$.

8. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i; \\ 3z_1+iz_2=2-3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+i)z_1+iz_2=-3+4i; \\ -i\cdot z_1+(1-i)z_2=6+i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=0; \\ z_1+(3-i)z_2=3-3i; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (3-i)z_1+(4-2i)z_2=2+6i; \\ (4+2i)z_1-(2+3i)z_2=5+4i. \end{cases}$

9. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

а) -2; б) $2i$; в) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; г) $-z\,i$; д) $4-3i$; е) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$;

ж) $1-\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$; з) $\cos\alpha-i\sin\alpha$ $\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

и) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Вычислить:

а) $(1+i\sqrt{3})^9$; б) $(-1+i)^{24}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$; г) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

д) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

11. Найти все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt{2-2\sqrt{3}\cdot i}$; в) $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{3+4i}$; д) $\sqrt[3]{-1}$;

е) $\sqrt[3]{-1+i}$; ж) $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$; з) $\sqrt[4]{-16}$; и) $\sqrt[4]{-i}$; к) $\sqrt[5]{-1+3i}$;

л) $\sqrt[5]{\dfrac{1-2i}{1+3i}}$; м) $\sqrt[8]{1}$.

12. Решить квадратные уравнения:

а) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; б) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;

в) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

13. Решить уравнения:

а) $z^3+3z^2+3z+3=0$; б) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$;

в) $2|z|-3z=1-2i$; г) $z^8-2z^4+2=0$; д) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2=2i$.

14. Найти множества точек на плоскости (z), определяемые заданными условиями:

а) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1$; б) $|z^2-1|\ge a^2$ $(a>0)$; в) $1\le|z+2+i|\le 2$;

г) $|z|>1-\operatorname{Re} z$; д) $0<\arg z\le\frac{\pi}{4}$; е) $|z|>2+\operatorname{Im} z$;

ж) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<-\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2}$.

15. Какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $\operatorname{Re}\overline{z}^2=1$; б) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1$; в) $\operatorname{Im}\overline{(z^2-\overline{z})}=2-\operatorname{Im} z$;

г) $2z\overline{z}+(2+i)z+(2-i)\overline{z}=2$; д) $|z-z_1|=|z-z_2|$;

е) $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$; ж) $z=\overline{z}$.

16. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий:

а) координатных осей Ox и Oy; б) прямой $y=x$; в) прямой $y=kx+b$, k, b – действительные числа; г) гиперболы $x^2-y^2=a^2$; д) окружности $x^2+y^2+2x=0$?

16.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

16.2.1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение 1. Областью в комплексной плоскости (z) называется открытое связное множество.

Определение 2. Открытым называется множество, состоящее лишь из внутренних точек.

Определение 3. Точка z называется внутренней точкой множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 4. Под ε-окрестностью точки a понимается открытый круг радиуса ε с центром в точке a:

$$|z-a|<\varepsilon. \tag{16.17}$$

Определение 2. Функция называется непрерывной в точке z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 3. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области.

Задачи для самостоятельного решения

17. Изобразить множества; выяснить, какие из них являются областями, какие нет, какие из них – ограниченные области, какие не ограничены: а) $\operatorname{Re} z = \alpha$; б) $\alpha < \operatorname{Re} z \le \beta$; в) $\operatorname{Im} z > \delta$; г) $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta,\ \gamma < \operatorname{Im} z < \delta$; д) $r \le |z - z_0| < R$.

18. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий (t – действительный параметр): а) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; б) $x = 2t$, $y = t - 1$; в) $y = 2x$; г) $2x + 3y = 1$; д) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

19. Какие линии заданы комплексным уравнением (t – действительный параметр): а) $z = (1+i)t$; б) $z = t^2 + it + 4$; в) $z = \cos t + i\sin t$; г) $z = t + \dfrac{i}{t}$; д) $z = t(it^2 + 1)$?

20. Для указанных функций найти действительную и мнимую части: а) $w = \overline{z} - iz^2$; б) $w = z^2 + i$; в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{1}{z}$; д) $w = \dfrac{iz+1}{1+z}$; е) $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

21. Найти образы данных точек при указанных отображениях: а) $z_0 = -i$, $w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i$, $w = (z-i)^2$; в) $z_0 = 1$, $w = \dfrac{1}{z-i}$; г) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

22. На какие линии плоскости (w) отображает функция $w = z^2$ следующие линии плоскости (z): а) прямую $x = 2$; б) прямую $y = 1$; в) гиперболу $xy = 1$; г) окружность $x^2 + y^2 = 4$?

23. Найти уравнение линий плоскости (w), на которые функция $w = \dfrac{1}{z}$ отображает следующие линии плоскости (z): а) $|z| = \dfrac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$; г) $\arg z^2 = -\dfrac{\pi}{2}$; д) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; е) $|z| = z$.

24. Выделить действительную и мнимую части у следующих функций: а) $w=e^{-z}$; б) $w=e^{\bar{z}^2}$; в) $w=\sin z$; г) $w=\operatorname{ch}(z-i)$; д) $w=2^{z^2}$; е) $w=\operatorname{sh} z$; ж) $w=\operatorname{tg} z$.

25. Записать комплексные числа в показательной форме: а) 1; б) i; в) $1+i$; г) $e^2(\cos 3-i\sin 3)$; д) $\cos 2-i\sin 2$.

26. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\operatorname{Ln}(1-i)$; в) $\operatorname{Ln}(-3+4i)$; г) $\operatorname{Ln}(-i)$.

27. Записать в алгебраической форме: а) $\sin\pi i$; б) $\cos\pi i$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi i}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\pi i$; д) $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}$; е) $\operatorname{th}\pi i$.

28. Вычислить: а) $\operatorname{Arc}\sin i$; б) $\operatorname{Arctg} 2i$; в) $\operatorname{Arc}\cos i$; г) $\operatorname{Arsh} i$; д) $\operatorname{Arth} i$.

29. Найти: а) 3^{2+i}; б) 1^i; в) $(-1)^{\sqrt{2}}$; г) $(1+i)^i$; д) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; е) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$; ж) $(1-i)^{3-3i}$.

Решить уравнения:

30. $e^z+i=0$. **31.** $4\cos z+5=0$. **32.** $\operatorname{sh} iz=-i$. **33.** $\sin z=\pi i$.
34. $e^{ix}=\cos\pi x (x\in R)$. **35.** $e^{2z}+2e^z-3=0$. **36.** $\operatorname{ch} z=i$.
37. а) $\ln(z+i)=0$; б) $\ln(i-z)=1$.

Вычислить пределы:

38. $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2-4iz-3}{z-i}$. **39.** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$. **40.** $\lim\limits_{z\to -i}\arg z$.

41. $\lim\limits_{z\to\frac{\pi i}{4}}\frac{\sin iz}{\operatorname{ch} z+i\operatorname{sh} z}$. **42.** $\lim\limits_{z\to\pi/2}\frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}+i}$.

Доказать непрерывность на всей комплексной плоскости следующих функций:

43. $w=\bar{z}$. **44.** $w=|z|\operatorname{Re} z$. **45.** $w=e^{\bar{z}}$. **46.** $w=\cos|z|$.

Как доопределить данные функции в точке $z=0$, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

47. $f(z)=\frac{z\cdot\operatorname{Re} z}{|z|}$. **48.** $f(z)=\frac{z\cdot\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$. **49.** $f(z)=e^{-\frac{1}{|z|}}$.

50. $f(z)=\frac{z}{|z|}$.

51. Доказать, что функция e^z не имеет предела при $z\to\infty$.

Указание. Положить $z=iy$, так что $e^z=\cos y+i\sin y$.

вого из этих уравнений находим: $u=-\int 4y dx=-4xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем u по y и подставляем в (2): $-4x+\varphi'(y)=-4x-1$, откуда $\varphi'(y)=-1$ и $\varphi(y)=-y+c$. Следовательно, $u=-4xy-y+c$ и окончательно получим: $w=u+iv=$ $=-4xy-y+c+i(2x^2-2y^2+x)=2i(x^2-y^2+2ixy)+i(x+iy)+c=2iz^2+iz+c$. Определим c: $f(0)=2i\cdot 0+i\cdot 0+c$ и $c=0$; таким образом, $w=2iz^2+iz$. #

16.3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то $k=|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости (z) на плоскость (w). Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости (z), проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$.

Пример. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

∇ Имеем $w'(z)=2z$, так что $w'(z_0)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$. Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $w'(z_0)$ к тригонометрической, получим: $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $k=4$, угол поворота $\varphi=\pi/4$. #

Задачи для самостоятельного решения

52. Пользуясь условиями Коши–Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими, хотя бы в одной точке, какие – нет: а) $w=z^2\bar{z}$; б) $w=ze^z$; в) $w=|z|\bar{z}$; г) $w=e^{z^2}$; д) $w=|z|\operatorname{Re}\bar{z}$; е) $w=\sin 3z-i$; ж) $w=\bar{z}\operatorname{Re}z$; з) $w=\bar{z}\operatorname{Im}z$; и) $w=|z|\operatorname{Im}z$; к) $w=\operatorname{ch}z$.

53. Показать, что в области $\operatorname{Re}z>0$ $w=\ln z$ – аналитическая функция.

54. Показать, что условия Коши–Римана в полярных координатах имеют вид $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$; $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}$. Проверить выполнение этих условий для функций: а) $w=\ln z$; б) $w=\ln^2 z$.

55. Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ – аналитические в области D функции, то функции $f(z)\pm g(z)$, $f(z)g(z)$ также аналитичны в области D, а частное $f(z)/g(z)$ – аналитическая функция во всех точках области D, в которых $g(z)\neq 0$. При этом имеют место формулы $(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z)$; $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;
$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

56. Используя утверждение задачи 4, найти области аналитичности функций и их производные: а) $f(z)=\operatorname{tg} z$; б) $f(z)=ze^{-z}$; в) $f(z)=\dfrac{z\cos z}{1+z^2}$; г) $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$; д) $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$; е) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$; ж) $f(z)=\operatorname{cth} z$; з) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

57. Показать, что следующие функции являются гармоническими: а) $u=x^2+2x-y^2$; б) $u=2e^x\cos y$; в) $u=\ln(x^2+y^2)$; г) $u=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; д) $u=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; е) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

58. В следующих примерах даны пары $u(x,y)$, $v(x,y)$ гармонических функций. Найти среди них сопряженные пары гармонических функций: а) $u=3(x^2-y^2)$, $v=3x^2-y^3$; б) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; в) $u=x$, $v=-y$; г) $u=e^x\cos y+1$, $v=1+e^x\sin y$.

59. Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части: а) $v=x^3-3xy^2$, $0\le|z|<+\infty$, $f(i)=i$; б) $v=2e^x\sin y$, $0\le|z|<+\infty$; в) $v=x^2-y^2-1$, $0\le|z|<+\infty$, $f(-1)=0$; г) $u=2xy+3$, $0\le|z|<+\infty$; д) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $0<|z|<+\infty$, $f(1)=0$; е) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$, $0<|z|<+\infty$, $f(1)=0$; ж) $u=x^2-y^2+xy$, $0\le|z|<+\infty$; з) $v=xy$, $0\le|z|<+\infty$; и) $u=2\sin x\operatorname{ch} y-x$, $0\le|z|<+\infty$, $f(0)=0$; к) $v=-2\sin 2x\operatorname{sh} 2y+y$, $0\le|z|<+\infty$, $f(0)=2$.

60. Можно ли найти аналитическую функцию, у которой действительная часть равна: а) $\sqrt{x^2+y^2}$; б) x^3+y^3; в) $(e^x+e^{-x})\sin y$?

61. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений $w=f(z)$ в указанных точках: а) $w=z^2$, $z_0=\sqrt{2}(1+i)$; б) $w=z^2$, $z_0=i$; в) $w=z^3$, $z_0=1+i$; г) $w=z^3$, $z_0=1$; д) $w=\sin z$, $z_0=0$; е) $w=ie^{2z}$, $z_0=2\pi i$.

62. Выяснить, какая часть плоскости (w) растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях: а) $w=\frac{1}{z}$; б) $w=e^{z-1}$; в) $w=\ln(z+1)$; г) $w=z^2+2z$.

63. Найти множество всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях коэффициент растяжения $k=1$: а) $w=(z-1)^2$; б) $w=z^2-iz$; в) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$; г) $w=-z^3$.

64. Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях угол поворота $\varphi=0$: а) $w=-\frac{i}{z}$; б) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$; в) $w=z^2+iz$; г) $w=z^2-2z$.

16.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФКП

16.4.1. ИНТЕГРАЛ ПО КРИВОЙ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D; L – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D.

По определению

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\sup|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k . \tag{16.47}$$

Если $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy \tag{16.48}$$

– вычисление интеграла (16.47) сводится к вычислению (обычных) криволинейных интегралов второго рода. Заметим, что интеграл (16.47) зависит, вообще говоря, от пути интегрирования L. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (или в комплексной форме $z(t)=x(t)+iy(t)$), начальная и конечная точки кривой L соответствуют значениям параметра $t=\alpha$, $t=\beta$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы по заданным контурам:

65. $\int\limits_L (2z+1)\bar{z}dz$, $L=\{z:|z|=1;\ \ 0\le \arg z\le \pi\}$.

66. $\int\limits_L e^{|z|^2}\ \mathrm{Re}\, zdz$, L – прямая, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

67. $\int\limits_L \mathrm{Im}\ zdz$, $L=\{(x,\ y): y=2x^2,\ \ 0\le x\le 1\}$.

68. $\int\limits_L (iz^2-2\bar{z})dz$, $L=\{z:|z|=2,\ 0\le \arg z\le \pi/2\}$.

69. $\int\limits_L \mathrm{Re}(z+z^2)dz$, $L=\{(x,\ y): y=2x^2,\ \ 0\le x\le 1\}$.

70. $\int\limits_L \bar{z}e^z dz$, L – отрезок от точки $z_0=1$ до точки $z_1=i$.

71. $\int\limits_L \mathrm{Re}(\cos\ z)\sin\ zdz$, $L=\left\{z: \mathrm{Re}\, z=\pi/3,\ \ |\mathrm{Im}\, z|\le \dfrac{1}{2}\right\}$.

72. $\int\limits_L \dfrac{z}{\bar{z}}\, dz$, $L=\{z:\ |z|=1,\ \ 0\le \arg z\le \pi/2\}$.

73. $\int\limits_1^i ze^z dz$. **74.** $\int\limits_1^i (3z^4-2z^3)dz$. **75.** $\int\limits_1^i z\sin zdz$.

76. $\int\limits_1^i \dfrac{\ln(z+1)}{z+1}\, dz$. **77.** $\int\limits_0^{1+i} \sin z\cdot\cos zdz$. **78.** $\int\limits_L \sqrt{\bar{z}}\, dz$,

$L=\{z:|z|=1,\ \ \pi/2\le \arg z\le \pi\}$.

79. $\int\limits_L \dfrac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, L – верхняя половина окружности $|z|=1$; $\sqrt[4]{1}=1$.

80. $\int\limits_{-1}^i \dfrac{\cos zdz}{\sqrt{\sin z}}$, $\sqrt{\sin(-1)}=i\sqrt{\sin 1}$.

81. $\int\limits_L \mathrm{Ln}\, zdz$, $L:\{z:|z|=1\}$, $\mathrm{Ln}\, i=\dfrac{\pi i}{2}$.

82. $\int\limits_L z^n\ \mathrm{Ln}\ zdz$, $L=\{z:|z|=1\}$, $\mathrm{Ln}(-1)=\pi i$.

Применяя теоремы и интегральные формулы Коши, вычислить интегралы:

83. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\,dz$. **84.** $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}dz$. **85.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz$.

86. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$. **87.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}dz$.

88. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^3}$. **89.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}\,dz}{(z-1)^2(z-3)}$. **90.** $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{2\pi i}}{z^3-4z^2}\,dz$.

91. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz$. **92.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1-\sin z}{z^2}dz$.

16.5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

16.5.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,. \tag{16.58}$$

Теорема. Для сходимости ряда (16.58) необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_n \tag{16.58$'$}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{16.58$''$}$$

Определение. Ряд (16.58) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|. \tag{16.59}$$

Ряды (16.58)′, (16.58)″ и (16.59) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

б) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2=2$, т.е. в кольце $0<|z-2|<1$. Имеем $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{1+(z-2)}=$

$$=\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\ldots=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \text{ . \#}$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость ряды:

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin in}{3^n}$. **94.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$. **95.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos in}$.

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$. **97.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$. **98.** $\sum\dfrac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

99. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in}z^n$. **100.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{1-i}\right)^n$. **101.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln in}\right)^n$.

102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi i}{n}\cdot z^n$. **103.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\operatorname{sh}^n(1+in)}$. **104.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+i)z^n$.

Определить область сходимости следующих рядов:

105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$. **106.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^n(iz)^{-n}$. **107.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$. **109.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{2^n}$. **110.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{4}\right)^n$.

111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z+1-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$.

112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n!}$ $(0!=1)$.

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$. **114.** $-\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

Данные ниже функции разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

115. $\sin(2z+1)$ по степеням $(z+1)$. **116.** $\cos z$ по степеням $\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$. **117.** e^z по степеням $(2z-1)$. **118.** $\frac{1}{3z+1}$ по степеням $(z+2)$.

119. $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z. **120.** $\ln(2+z-z^2)$ по степеням z.

121. $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$ по степеням z.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $a=0$ следующие функции:

122. $\frac{\sin^2 z}{z}$. **123.** $\frac{e^z}{z}$. **124.** $z^4\cos\frac{1}{z}$. **125.** $\frac{1+\cos z}{z^4}$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

126. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, а) $2<|z|<3$; б) $3<|z|<+\infty$.

127. $\frac{1}{(z+2)\,(1+z^2)}$, а) $1<|z|<4$; б) $4<|z|<+\infty$.

128. $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<\infty$.

129. $\frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$. **130.** $\frac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $2<|z|<+\infty$.

131. $\frac{1}{(z^2-4)^2}$, $4<|z+2|<+\infty$.

Пример 3. Для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $z=0$ является особой точкой. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$ в главной части содержит бесконечное число членов; это существенно особая точка.

Пример 4. Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

∇ Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, откуда $\left(\frac{1}{z}=\mathrm{Ln}(-1)\right)$ $z_n=\dfrac{1}{(2n+i)\pi i}$, причем эти точки являются нулями первого порядка. Следовательно, в точках $z_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi i}$, $n\in Z$ функция $f(z)$ имеет простые полюса. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$: это означает, что любая окрестность точки $z=0$ содержит бесконечное число особых точек $f(z)$. #

Задачи для самостоятельного решения

У нижеследующих функций найти нули и определить их порядки:

132. z^4+4z^2. **133.** $\dfrac{\sin z}{z}$. **134.** $\dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$. **135.** $1+\operatorname{ch} z$.

136. $(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$. **137.** $\cos z+\operatorname{ch} iz$.

Найти порядок нуля $z_0=0$ для следующих функций:

138. $\dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2}$. **139.** $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$. **140.** $\dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z-\operatorname{sh} z}$.

141. $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$.

Определить характер особой точки $z_0=0$ для следующих функций:

142. $\dfrac{1}{z-\sin z}$. **143.** $\dfrac{1}{\cos z-1-\frac{z^2}{2}}$. **144.** $\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$.

Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

145. $\dfrac{1}{1-\sin z}$. **146.** $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$. **147.** $e^{\frac{1}{z+2}}$.

148. $\cos\dfrac{1}{z+2i}$. **149.** $\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$. **150.** $\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$.

151. $z\sin\dfrac{1}{z}$. **152.** $\dfrac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$. **153.** $\operatorname{th} z$.

16.7. ВЫЧЕТЫ. ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

16.7.1. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ относительно точки a (обозначается $\operatorname{res} f(a)$ или $\operatorname{res}\limits_{a} f(z)$ называется число, равное

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} f(z)dz\,; \qquad (16.71)$$

L – простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя (только) одну особую точку a. В качестве L удобно брать окружность $|z-a|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения (16.71) вытекает, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $z-a$:

$$\operatorname{res} f(a)=c_{-1}. \qquad (16.72)$$

Из представления (16.72) следует, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе определяется по формуле

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]. \qquad (16.73)$$

Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем a – простой нуль функции $\psi(z)$, а $\varphi(a)\neq 0$, то

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (16.74)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{3i} \frac{z^2}{(z^2+9)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+3i)^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{6iz}{(z+3i)^3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}. \#$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$ $(a > b > 0)$.

∇ Применяя подстановку $e^{ix} = z$, получаем после преобразований $\left(\cos x = \frac{z^2+1}{2z},\ dx = \frac{dz}{iz}\right)$ $I = \frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(bz^2+2az+b)^2} =$

$= \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res} F(z_k)$. Внутри единичного круга $|z| < 1$ при условии $(a > b > 0)$ находится только один полюс (двукратный) $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z) = \frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ относительно этого полюса $\operatorname{res} F(z_1) = \lim\limits_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right] = \frac{a}{4}(a^2-b^2)^{-3/2}$

и $I = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$. #

Задачи для самостоятельного решения

В нижеследующих задачах требуется найти вычеты указанных функций относительно ее конечных изолированных особых точек:

154. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$. **155.** $f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}$. **156.** $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$.

157. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$. **158.** $f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$. **159.** $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.

160. $f(z) = \cos\frac{z}{z-1}$. **161.** $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$. **162.** $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$.

Вычислить контурные интегралы:

163. $\int\limits_L \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, $L: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$.

164. $\int\limits_L \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$, $L: |z-i|=3$. **165.** $\int\limits_L \frac{z\,dz}{e^z+3}$, $L: |z+1|=4$.

166. $\int\limits_L \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z}$, $L: |z|=1$. **167.** $\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3}\,dz$, $L: \frac{x^2}{4}+y^2=1$.

168. $\int\limits_L \frac{e^z\,dz}{z^4+2z^2+1}$, $L: |z-i|=1$. **169.** $\int\limits_L \frac{z\sin z\,dz}{(z-1)^5}$, $L: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$.

170. $\int\limits_L \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$, $L: |z|=1$.

171. $\int\limits_L z\,\mathrm{tg}\,\pi z\,dz$, $L: |z|=1$. **172.** $\int\limits_L \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, $L: |z|=1$.

Вычислить действительные интегралы:

173. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0,\ \ b>0)$. **174.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

175. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$. **176.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

177. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, $a>1$. **178.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $a>1$.

179. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{1-2a\sin x+a^2}$, $0<a<1$. **180.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x}$, $a>b>0$.